$$W_e = B \sum_{j=1}^{n} \Delta p_j \, Q\left[(t_n - t_{j-1})_D\right]$$

UNIVERSIDAD DEL ZULIA
FACULTAD DE INGENIERIA
ESCUELA DE INGENIERIA DE PETROLEO
MARACAIBO - VENEZUELA

YACIMIENTOS CON EMPUJE HIDRAULICO

$r_{eD} = \infty$

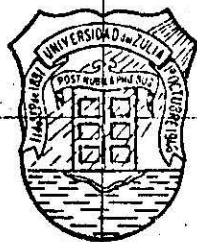
$r_{eD} = 3,5$

$r_{eD} = 3,0$

$r_{eD} = 2,5$

$r_{eD} = 2,0$

$r_{eD} = 1,5$



RAMIRO PEREZ PALACIO

1969

3,5 · 3,0 · 2,5 · 2,0 · 1,5 · 1,0 · 0,5

0 · 1,0 · 2,0 · 3,0 · 4,0 · 5,0 · 6,0

Tiempo Adimensional, t_D

UNIVERSIDAD DEL ZULIA
FACULTAD DE INGENIERIA
ESCUELA DE INGENIERIA DE PETROLEO
MARACAIBO - VENEZUELA

YACIMIENTOS CON EMPUJE HIDRAULICO

RAMIRO PEREZ PALACIO

1969

C O N T E N I D O

S I M B O L O S

La nomenclatura usada en su mayor parte se adapta a la nomenclatura aprobada por la Sociedad de Ingenieros de Petróleo de la AIME[17].

Símbolo	Nombre	Dimensión	Unidades más Usadas
A	área	L^2	pies^2, acre
b	ancho en un sistema lineal	L	pies
BAF	factor de recuperación en barriles por acre-pie	adimensional	BN/acre-pie
B_g	factor volumétrico del gas	adimensional	BY/PCN
B_{ig}	factor volumétrico del gas a la presión de inyección	adimensional	BY/PCN
B_o	factor volumétrico del petróleo	adimensional	BY/PCN
B_t	factor volumétrico total o bifásico	adimensional	BY/BN
C	constante de intrusión de agua	L^4T/M	BN/mes/lpc
C_s	constante de intrusión de agua de Schilthuis	L^4T/M	BN/mes/lpc
C_h	constante de intrusión de agua de Hurst-Modificada	L^4T/M	BN/mes/lpc
C_v	constante de intrusión de agua de van Everdingen y Hurst	L^4T/M	BN/mes/lpc
c	compresibilidad	LT^2/M	1/pc
c_p	compresibilidad de los poros	LT^2/M	1/pc
c_r	compresibilidad de la parte sólida de la roca	LT^2/M	1/pc
c_b	compresibilidad total de la roca	LT^2/M	1/pc
c_e	compresibilidad efectiva	LT^2/M	1/pc
c_o	compresibilidad del petróleo	LT^2/M	1/pc

Símbolo	Nombre	Dimensión	Unidades más Usadas
e	rata de intrusión	L^3/T	BN/día
f_d	flujo fraccional de la fase desplazante	dimensional	-
g	aceleración de la gravedad	L/T^2	cm/seg^2
G	gas libre inicialmente en el yacimiento	L^3	PCY
G_i	gas inyectado acumulado	L^3	PCN
G_p	gas producido acumulado de un yacimiento	L^3	PCN
G_{pc}	gas producido de la capa de gas	L^3	PCN
h	espesor de la formación productora	L	pies
J	indice de productividad	L^4T/M	BNPD/lpc
J_o	función de Bessel de primera clase y de orden cero	adimensional	-
J_1	función de Bessel de primera clase y de primer orden	adimensional	-
k	permeabilidad absoluta	L^2	md
k_o	permeabilidad efectiva del petróleo	L^2	md
k_g	permeabilidad efectiva del gas	L^2	md
k_w	permeabilidad efectiva del agua	L^2	md
k_{ro}	permeabilidad relativa del petróleo	adimensional	-
k_{rg}	permeabilidad relativa del gas	adimensional	-
k_{rw}	permeabilidad relativa del agua	adimensional	-
L	longitud	L	pies
ln	logarítmo natural (base e)	-	-
log	logarítmo decimal (base 10)	-	-
m	razón del volumen de gas libre al volumen de petróleo inicialmente en el yacimiento	adimensional	-

Símbolo	Nombre	Dimensión	Unidades más Usadas
N	petróleo originalmente en un yacimiento	L^3	BN
N_p	producción acumulada de petróleo	L^3	BN
ΔN_p	producción durante un intervalo Δt.	L^3	BN
p	presión	M/LT^2	lpca
p_a	presión atmosférica o de abandono	M/LT^2	lpca
p_b	presión en el punto de burbujeo	M/LT^2	lpca
p_e	presión en el límite exterior	M/LT^2	lpca
p_i	presion inicial	M/LT^2	lpca
p_{sc}	presión a conidiciones normales	M/LT^2	lpca
p_w	presión en el fondo del pozo	M/LT^2	lpca
p_{wf}	presión en el fondo del pozo fluyendo	M/LT^2	lpca
p_{ws}	presión en el fondo del pozo estática	M/LT^2	lpca
P_c	presión capilar	M/LT^2	lpca
$\Delta p(t_D)$	caída de presión adimensional. Valor numérico que representa la caída total de presión que ocurre en el límite interior de un yacimiento o acuífero en el período $(t_n-t_{j-1})_D$, debido a una caída unitaria en la rata de producción o intrusión en este límite, a partir del tiempo t_{j-1}	adimensional	-
q	rata de producción (flujo) en el yacimiento	L^3/T	BPD
q_o	rata de producción de petróleo en el yacimiento	L^3/T	BPD
q_g	rata de flujo de gas en el yacimiento	L^3/T	BPD
Q_o	rata de flujo de petróleo a condiciones normales	L^3/T	BPD

Símbolo	Nombre	Dimensión	Unidades más Usadas
Q_g	rata de flujo de gas a condiciones normales	L^3/T	BPD
$Q(t_D)$	intrusión adimensional. Valor numérico que representa el volumen total de fluido por unidad de espesor de formación que pasa por el límite interior de un yacimiento o acuífero en el período $(t_n-t_{j-1})_D$, debido a una caída de presión unitaria en este límite interior, a partir del tiempo t_{j-1}	adimensional	-
r	distancia radial	L	pies
r_e	radio en el límite exterior	L	pies
r_w	radio del pozo	L	pies
r_D	radio adimensional = r/r_w (o r/R_i)	adimensional	-
r_{eD}	radio adimensional = r_e/r_w (o r_e/R_i)	adimensional	-
RE	factor de recuperación en porcentaje respecto al petróleo originalmente en el yacimiento	adimensional	-
R	razón gas-petróleo instantánea, RGP	adimensional	PCN/BN
R_i	radio exterior del yacimiento o interior del acuífero	L	pies
R_p	razón gas-petróleo acumulativa	adimensional	PCN/BN
R_s	razón gas disuelto-petróleo	adimensional	PCN/BN
S	saturación	adimensional	-
S_g	saturación de gas	adimensional	-
S_{gc}	saturación crítica del gas	adimensional	-
S_{gr}	saturación residual del gas	adimensional	-
S_o	saturación de petróleo	adimensional	-
S_{or}	saturación residual de petróleo	adimensional	-
S_w	saturación de agua	adimensional	-

Símbolo	Nombre	Dimensión	Unidades más Usadas
S_{wc}	saturación crítica de agua	adimensional	-
$\bar{S}_{wf}$	saturación promedia de agua en la zona invadida por el agua de intrusión	adimensional	-
$\bar{S}_{gf}$	saturación promedia de gas en la zona invadida por el agua de intrusión	adimensional	-
t	tiempo	T	dias
t_D	tiempo adimensional = $0{,}006323\ kt/\phi\mu c r_w^2$	adimensional	-
t_{Dr}	tiempo adimensional = t_D/r_D^2	adimensional	-
t_{DA}	tiempo adimensional = $t_D/\pi r_{eD}^2$	adimensional	-
Δt	intervalo de tiempo	T	-
Δt_D	constante que transforma tiempo dimensional a tiempo adimensional	1/T	1/dia
t	temperatura absoluta	-	°R
u	velocidad volumétrica de flujo (rata volumétrica por unidad de área)	L/T	pies/dia
u	variable de integración	adimensional	-
V	volumen	L^3	PC
V_p	volumen poroso	L^3	PC
W_e	intrusión de agua acumulada	L^3	BN
ΔW_e	intrusión de agua durante un intervalo Δt	L^3	BN
W_p	agua producida acumulada	L^3	BN
ΔW_p	agua producida durante un intervalo Δt	adimensional	BN
Y_o	función de Bessel de segunda clase y de orden cero	adimensional	-
Y_1	función de Bessel de segunda clase y de primer orden	adimensional	-

Símbolo	Nombre	Dimensión	Unidades más Usadas
z	factor de compresibilidad del gas	adimensional	-
Z	función de resistencia. Valor que representa la caída total de presión en el límite interior de un yacimiento durante el período $(t_n-t_{j-1})_D$, debido a una caída unitaria en la rata de producción o intrusión en este límite interior a partir del tiempo t_{j-1}	M/L^4T	lpc/BPD
ΔZ	valor de la función de resistencia al tiempo t menos la función de resistencia al tiempo $t-\Delta t$, $\Delta Z = Z_{t-\Delta t}$	M/L^4T	lpc/BPD

L E T R A S   G R I E G A S

Símbolo		Nombre	Dimensión	Unidades más Usadas
α	alfa	ángulo que forma la dirección de flujo con la horizontal	-	grados
θ	teta	ángulo correspondiente a la circunferencia de la cual actua el acuífero	-	grados
σ	sigma	desviación normal	-	-
ϕ	fi	porosidad	adimensional	-
μ	mu	viscosidad	M/LT	cp
μ_o	mu	viscosidad del petróleo	M/LT	cp
μ_g	mu	viscosidad del gas	M/LT	cp
ρ	ro	densidad	M/L^3	lbs/PC
ρ_o	ro	densidad del petróleo	M/L^3	lbs/PC
ρ_w	ro	densidad del agua	M/L^3	lbs/PC
ρ_g	ro	densidad del gas	M/L^3	lbs/PC

ABREVIACIONES

Nombre	Abreviación
libras por pulgada cuadrada absoluta	lpca
libras por pulgada cuadrada relativa o manométrica	lpcr, lpcm
centímetro	cm
centímetro cuadrado	cm.c
centímetro cúbico	cm.cu.
píes cúbicos	PC
píes cúbicos a condiciones normales	PCN
barriles a condiciones normales	BN
píes cúbicos a condiciones del yacimiento	PCY
barriles a condiciones del yacimiento	BY

SUBINDICES

Simbolo	Nombre
a	atmosférica
a	abandono
c	crítica
c	capitar
cap	contacto agua-petróleo
d	fase desplazante
D	adimensional
g	gas
i	valor o condiciones iniciales
j	número de intervalos
max	máximo
min	mínimo
n	número total de intervalos
o	petróleo
p	poro
r	radial
r	relativa
s	solución de gas en petróleo (R_s)
w	agua
w	a las condiciones del pozo
x	dirección x
y	dirección y
z	dirección z

YACIMIENTOS DE PETROLEO O GAS CON EMPUJE HIDRAULICO

El têrmino We que aparece en las ecuaciones de Balance de Materiales[1], representa la cantidad de agua que entra a un yacimiento de petróleo o gas, proveniente de formaciones adyacentes saturadas de agua (acuíferos), como consecuencia de la disminución de presión en el contacto agua-petróleo, debido a la producción de fluidos del yacimiento. La magnitud del término We está relacionada con la actividad del acuífero y forma parte de la energía total disponible para producir el petróleo. Al término We se le denomina Intrusión de Agua y los yacimientos que lo presentan se denominan Yacimientos con Empuje Hidráulico o Hidrostático.

El presente trabajo comienza con una sección general sobre yacimientos con empuje hidráulico. Presenta luego la deducción y solución de la ecuación de flujo transitorio o ecuación de difusividad aplicada a intrusión de agua, tanto para sistemas lineales como radiales. Continua con una discusión de los principales métodos para análisis de yacimientos con empuje hidráulico, referente a la evaluación de la intrusión de agua, petróleo originalmente en el yacimiento, etc. Se discuten luego los métodos de predicción de este tipo de yacimientos.

GENERALIDADES

Empuje hidráulico es generalmente el mecanismo de recuperación primaria más eficiente en yacimientos de petróleo. Al mismo tiempo, algunos de los yacimientos más productores del mundo han sido producidos bajo este mecanismo. Entre muchos, pueden mencionarse el campo East Texas, Conroe, Yates, Thompson y Friendwood en los Estados Unidos; el campo Kirkut en Irak y los campos de Arabia Saudita.

Acuíferos.

Los yacimientos con empuje hidráulico están total o parcialmente comunicados con formaciones adyacentes totalmente saturadas de agua, que reciben el nombre de acuíferos (Latin: aqua = agua y ferre= llevar). Tales acuíferos pueden estar situados en la periferia de la formación productora del yacimiento y en este caso, se denominan acuíferos laterales o de flanco, o pueden estar situados por debajo de la formación productora y en tal caso se denominan acuíferos de fondo. Los mecanismos correspondientes se denominan empuje hidráulico lateral y empuje hidráulico de fondo respectivamente. En los acuíferos laterales sólo una parte del área de la zona de petróleo está en contacto con el acuífero; en cambio, en un acuífero de fondo, éste se encuentra en contacto con la totalidad del área productora. La parte donde se une el acuífero y la zona petrolífera se denomina simplemente, contacto agua-petróleo.

En un acuífero lateral, el agua avanza por los lados o costados del yacimiento y generalmente su migración se dirige a las partes altas de la estructura. Los pozos en la parte baja de la estructura son los primeros invadidos por el agua y la producción de agua aumenta rápidamente en tales pozos. En cambio en los acuíferos de fondo, el agua se mueve en dirección vertical; por tanto, en un yacimiento cuya formación productora sea horizontal, los pozos serán inundados por agua a un mismo tiempo siempre y cuando se produzcan bajo condiciones similares. Estos tipos de yacimientos con acuíferos de fondo han sido estudiados por Muskat[2], Hutchinson y Kemp[3], Henley y colaboradores[4], Elkins[5], Coats[6], etc.

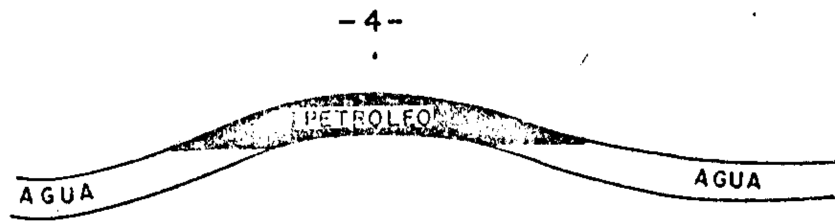
La forma de un acuífero puede ser muy variado, dependiendo

del tipo de estructuras y entrampamiento del sistema yacimiento acuífero. Aparte de los acuíferos de fondo mencionados antes, muchos sistemas yacimiento-acuífero pueden aproximarse bien sea a sistemas de tipo radial o de tipo lineal, para los cuales existen soluciones analíticas [7,8,9], para el cálculo de la intrusión. El tipo radial se encuentra más frecuentemente en estructuras tales como anticlinales y domos y el tipo lineal generalmente son resultado de entrampamiento por falla. La Fig.1 ilustra un tipo común de acuífero radial, donde la intrusión ocurre a través de toda la circunferencia. Ejemplos de este tipo de comportamiento pueden consultarse en la literatura[10]. Puede ocurrir que el flujo sea radial pero que el flujo ocurra sólo en una parte de la circunferencia; en tal caso, la intrusión será proporcional a la circunferencia efectiva en que ocurra la intrusión.

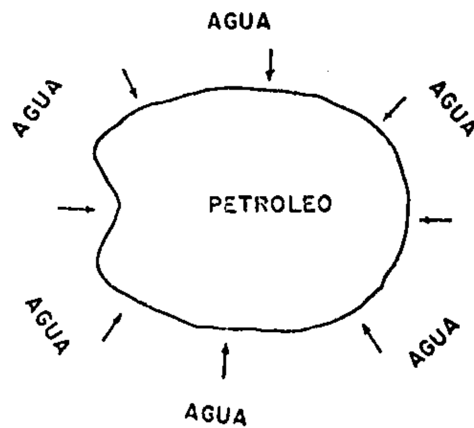
El tamaño del acuífero también puede variar mucho. Muskat[11] considera que si el volumen poroso del acuífero es alrededor de 1000 veces o más el volumen poroso del yacimiento, el acuífero puede considerarse de extensión infinita respecto al yacimiento, y usarse en esta forma en lo que respecta al comportamiento de flujo no-continuo. Tal tamaño corresponde, para acuíferos de forma radial, a un radio del acuífero de 32 veces el radio del campo de petróleo, es decir, $r_{eD} = 32$. Acuíferos de tamaño menor al mencionado se consideran de tamaño finito y es necesario conocer los límites del mismo con el propósito de evaluar su radio o longitud respecto al radio o longitud del yacimiento. Sin embargo, la ecuación de difusividad, como se verá más adelante, ha sido resuelta para muchos valores de r_{eD}.

Mecanismo del Empuje Hidráulico.

El principal factor que impulsa el agua a fluir a un yacimien



a) Corte Vertical



b) Corte Horizontal

Fig. 1 - Ilustración de un sistema yacimiento-acuífero tipo radial

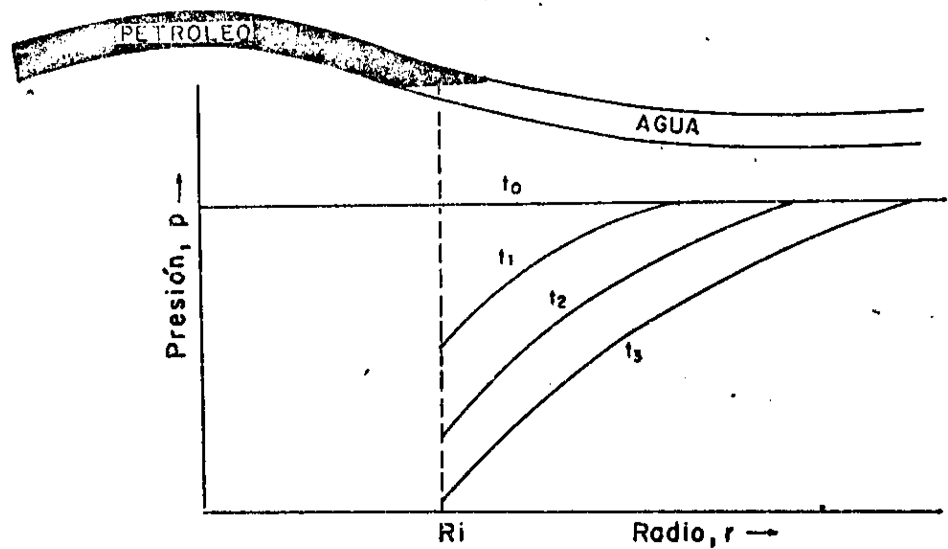


Fig. 2 - Distribución de presión con tiempo en un acuífero de extensión infinita. $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$.

to de petróleo es la expansión del agua del acuífero. A medida que la presión disminuye en un yacimiento debido a su propia producción de hidrocarburos, se crea una presión diferencial entre el yacimiento y el acuífero.. Cuando una presión diferencial (disturbio de presión) llega al contacto agua-petróleo, el agua del acuífero cerca al yacimiento comienza a expandirse a la presión menor a medida que el tiempc avanza, el disturbio viaja a través del acuífero y más agua se expande a la presión menor, aumentando al mismo tiempo la intrusión de agua al yacimiento. Esto se ilustra gráficamente en la Fig.2, donde Ri es el radio inicial exterior del yacimiento (o el radio inicial interior del acuífero). Antes de iniciar la producción del yacimiento, la presión esta representada por la linea to. Para tiempos posteriores t_1, t_2, t_3 ... etc. las curvas de distribución de presión indican un aumento continuo del radio exterior de lates curvas. Si el acuífero es lo suficientemente grande, tal que el diferencial de presión no alcanza un límite exterior del acuífero durante el periodo de interés, entonces se habla de un acuífero infinito. El tipo de flujo durante el cual el disturbio viaja a través del acuífero es estrictamente no-continuo. Finalmente el disturbio alcanza el límite exterior del acuífero y a partir de este instante, el flujo se convierte en semi-continuo (seudo-continuo o cuasi-continuo) o simplemente continuo. La Fig.3 ilustra la distribución de presión para este caso, a diferentes tiempos, donde r_e es el radio exterior del acuífero. Estos tipos de acuíferos se denominan limitados o finitos.

Pueden exister acuíferos con otras formas diferentes de energía al mecanismo descrito, considerado el más común. Algunas veces la formación del acuífero se extiende y aflora en superficie, donde una fuente de agua va reemplazando al agua que entra al yacimiento. Este tipo de acuífero se denomina acuífero abierto. En este caso, existe u

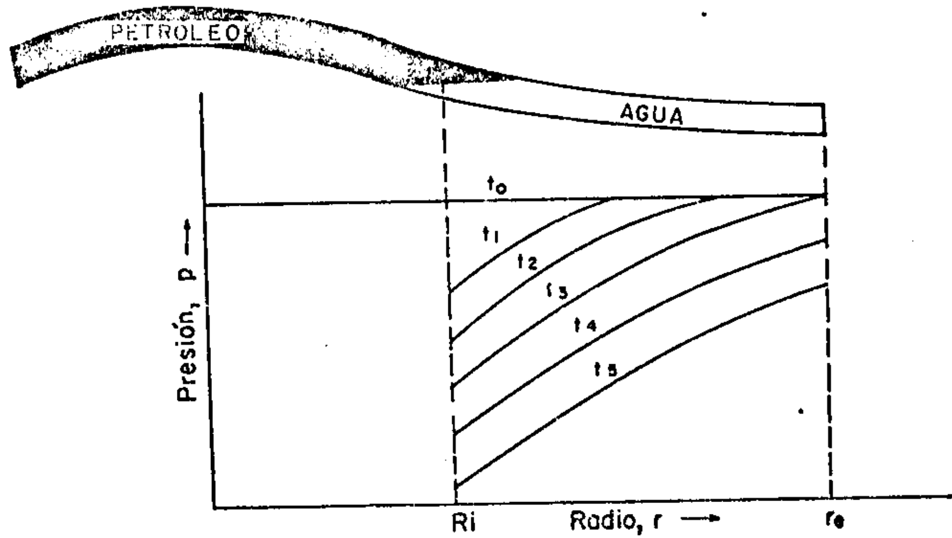


Fig. 3– Distribución de presión con tiempo en un acuifero de extensión limitada (finito). $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5$.

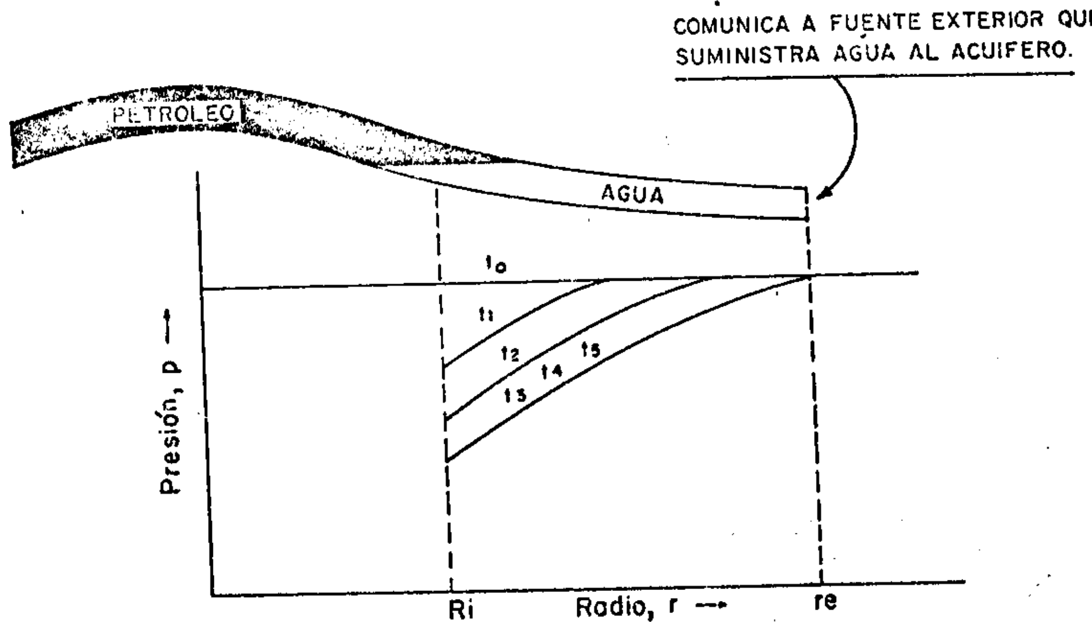


Fig. 4 – Distribución de presión con tiempo para un acuífero con suministro exterior de agua $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5$.

acuífero limitado (el radio exterior se extiende a la superficie) y el suministro de agua en superficie permite mantener una presión constante en el límite exterior del acuífero. Se habla entonces de flujo continuo o flujo arteciano. La distribución de presión en este caso se ilustra en la Fig.4. La existencia de este tipo de empuje hidráulico se ha descrito en la literatura[12]. Generalmente, en este tipo de acuíferp, ocurre un contacto agua-petróleo inclinado.

Otro mecanismo que puede contribuir al suministro de agua al yacimiento es el debido al hundimiento de los estratos superpuestos. A medida que la producción aumenta, la superficie terrestre se hunde. Esto trae como concecuencia varias cosas: compactación de lutitas vecinas al yacimiento y expulsión de agua de las mismas hacia el yacimiento; compactación tanto de la formación productora (lo que también contribuye al aumento de la recuperación) y compactación del acuífero, lo que contribuye a aumentar el suministro de agua al yacimiento. Este tipo de hundimiento es muy común en varias partes del mundo, entre otras, en la zona de Lagunillas, en la Costa Bolivar del Lago de Maracaibo, Venezuela y la zona de Long Beach, Los Angeles, California, E.U.

El factor efectivo de expansión, o más comunmente conocido como el factor efectivo de compresibilidad del agua del acuífero, esta formado por el factor de expansión mismo del agua del acuífero y por el factor de compresibilidad de la roca. Aunque este último término, en valor absoluto es generalmente pequeño, puede tomar un porcentaje considerable en el valor efectivo, debido al mayor volumen de rocas y especialmente en áreas donde ocurre hundimiento. Además, en casos en que ocurra solubilidad de gas en el agua[13], ésta puede ser otra causa que contribuya a aumentar el factor efectivo de expansión, especialmente en

zonas cercanas al yacimiento si han ocurrido acumulaciones de gas libre durante la formación del acuífero. La obtención del factor de compresibilidad de la roca fué discutido en otro trabajo[1].

Reconocimiento de un Empuje Hidráulico

Antes de iniciar la explotación y durante la primera fase de producción de un campo, no es posible asegurar la existencia efectiva de un empuje hidráulico. Debe tenerse presente que los principales factores que conducen a un buen empuje hidráulico son: alta permeabilidad, que permita una fácil entrada del agua a la formación y el tamaño y continuidad del espesor del acuífero con distancia. Por ejemplo, un acuífero delgado, de baja permeabilidad y que presenta lenticularidad es muy posible que no presente, o presente muy poco empuje hidráulico. Debido a que la gran mayoría de las propiedades, tamaño y formación del acuífero son desconocidas en el momento de descubrir un campo, es por consiguiente necesario esperar hasta tener disponible cierta historia de producción, con el fin de determinar su existencia y analizar su comportamiento.

Existen varios indicativos con el fin de reconocer si ocurre empuje hidráulico. Comenzando con la perforación, puede decirse que si se localizan contactos agua-petróleo, (de registros, pruebas, etc), es una buena indicación que puede ocurrir intrusión de agua una vez iniciada la producción. También, si la presión inicial del campo está por encima del punto de burbujeo (indicación que no existe capa de gas inicial), lógicamente debe existir una fuente de energía que contribuyó al mantenimiento de tal presión en el campo. Tal fuente de energía puede ser un acuífero.

A medida que la producción avanza, se dispone de mejor infor

mación para reconocer si existe o no un acuífero activo, es decir, que ocurra intrusión de agua. El principal indicativo es el comportamiento de presión. Cuando la presión de un campo (o yacimiento) tiende a permanecer constante o disminuye muy poco, es indicación de un empuje hidráulico activo. Generalmente, al comienzo de la producción se presenta una caída de presión, ya que como antes se mencionó, es necesario crear una presión diferencial en el contacto agua-petróleo con el fin de que comience la intrusión y ésto lógicamente, tarda cierto tiempo, que depende tanto del tamaño del yacimiento como de la rata de producción. Durante este tiempo, al no entrar ningún fluido extra al yacimiento, la caída será mayor. En general, puede decirse, que en el caso de acuíferos infinitos, la rata de disminución de presión es menor a medida que avanza el tiempo; en cambio, en acuíferos limitados, la rata de disminución de presión puede ser constante con tiempo. Tambien debe tenerse en cuenta que la caída de presión se hace menor por debajo del punto de burbujeo debido a la liberación de gas.

A medida que se vaya disponiendo de historia de producción se recomienda calcular regularmente el petróleo originalmente en el yacimiento por balance de materiales[1], considerando que no existe intrusión de agua, es decir, $We = 0$. Si el valor del petróleo originalmente en el yacimiento aumenta consecutivamente a medida que la producción avanza, es también indicación que ocurre intrusión de agua ya que la ecuación de balance de materiales se ha considerado sin el término de intrusión, lo que disminuye el valor calculado. Un gráfico del petróleo calculado originalmente en el yacimiento, como función de tiempo (o producción acumulada), permite obtener fácilmente el valor verdadero del petróleo originalmente en el yacimiento, simplemente leyendo el valor extrapolado, cuando el tiempo (o la producción acumulada) sea

cero. Una vez obtenido N, se regresa a la ecuación de balance de materiales y se calcula la intrusión de agua, We.

Finalmente, es indicación de un empuje hidráulico: (a) el valor relativamente constante del índice de productividad considerado en la base al campo como un total; (b) si la presión no disminuye por debajo del punto de burbujeo, la razón gas-petróleo de producción (instantánea) permanece constante; (c) la producción de agua aumenta, especialmente si existen pozos cerca al contacto agua-petróleo. El estudio de estos pozos en particular, contribuye notoriamente al reconocimiento de intrusión.

En acuíferos de fondo, la producción de agua aumenta principalmente debido a la formación de conos de agua alrededor de los pozos ; si la producción disminuye debido a prorrateo u otro factor, la presión de fondo en los pozos aumenta, ya que los efectos del acuífero continuan y tienden a restablecer un nuevo equilibrio en el yacimiento.

Debe tenerse presente que mientras más rápido se determine la intrusión de agua a un campo, puede planearse mejor su desarrollo, ya que la localización de los pozos y el espaciamiento puede variar considerablemente si existe o no un acuífero activo.

Recuperación.

El factor de recuperación, definido como el petróleo recuperado por acre-pie de yacimiento o como porcentaje respecto al petróleo originalmente en el yacimiento, es un término afectado por muchas variables que dependen de las características de los fluidos y del yacimiento, lo mismo del arreglo de los pozos, etc.

Teniendo sólo consideraciones teóricas es bastante difícil incluir en una fórmula todas las variables que influyen en el factor de recuperación. Se han estudiado por separado algunos factores principalmente en procesos de invasión (inundación) con agua con fines de recuperación secundaria. También se han hecho algunas investigaciones de la recuperación usando una combinación de datos teóricos y de laboratorio, pero los esfuerzos se han dirigido principalmente a estudios de correlaciones y estadísticos usando datos de diferentes campos cuyo principal mecanismo de producción ha sido empuje hidráulico. En 1945, Craze y Buckley[14] publicaron un estudio estadístico, considerado hoy como clásico, sobre el efecto del espaciamiento de pozos en la recuperación en campos de petróleo, usando datos de 103 yacimientos. Posteriormente en 1955, Guthrie y Greenberger[15] usaron la misma información de Craze y Buckley para ilustrar el uso de análisis de correlación en la obtención de la mejor relación entre la eficiencia de recuperación en yacimientos con empuje hidráulico y varias combinaciones de parámetros, considerados como los principales que contribuyen a la eficiencia de recuperación. Más recientemente, en Octubre de 1967, el Instituto Americano del Petróleo, API[16] (American Petroleum Institute) publicó el API BUL. D-14 sobre un estudio estadístico de la recuperaión, tanto de campos cuyo principal mecanismo de producción es empuje por gas en solución como empuje hidráulico. Es un estudio hecho por el Sub-comité Sobre Eficiencia de Recuperación del API, iniciado en 1956, y donde participó prácticamente toda la Industria Norte Americana, Compañias Consultoras y algunas Universidades.

El trabajo comprendió una evaluación y estudio de 312 yacimientos de Estados Unidos y otras partes del mundo. De estos yacimientos, fueron seleccionados 72 que representaron una información acepta-

ble para análisis de empuje hidráulico en arenas y areniscas. A traves de estudios estadísticos de análisis de regresión y diferentes modelos y usando computadores digitales para derivar correlaciones, fué posible agrupar diferentes parámetros en una ecuación con el fin de determinar el factor de recuperación en tales yacimientos de empuje hidráulico. Es conveniente observar que el mencionado trabajo también incluye un estudio semejante para yacimientos con empuje por gas en solución.

Para yacimientos con empuje hidráulico, el factor de recuperación encontrado, en barriles normales de petróleo por acre-pie de formación productora, es,

$$BAF = \frac{4259\left[\frac{\phi(1-S_w)}{B_{oi}}\right]^{1,0422}\left[\frac{k\mu_{wi}}{\mu_{oi}}\right]^{0,0770}}{(S_w)^{0,1903}\left[\frac{p_i}{p_a}\right]^{0,2159}} \qquad (1)$$

El mismo factor, expresado como un porcentaje respecto al petróleo originalmente en el yacimiento, es,

$$RE = \frac{54,898\left[\frac{\phi(1-S_w)}{B_{oi}}\right]^{0,0422}\left[\frac{k\mu_{wi}}{\mu_{oi}}\right]^{0,0770}}{(S_w)^{0,1903}\left[\frac{p_i}{p_a}\right]^{0,2159}} \qquad (2)$$

donde p_a es la presión de abandono. Los demás términos corresponden a la nomenclatura normal de la AIME[17]. El subíndice i corresponde a condiciones iniciales. Debe tenerse cuidado en el uso de estas ecua

ciones, ya que ellas se aplican dentro determinado intervalo de validez para cada una de las variables que aparecen en las ecuaciones. Para valores muy altos o muy bajos de las variables se recomienda consultar el estudio original[16]. A veces es más conveniente escribir estas ecuaciones en forma logarítmica,

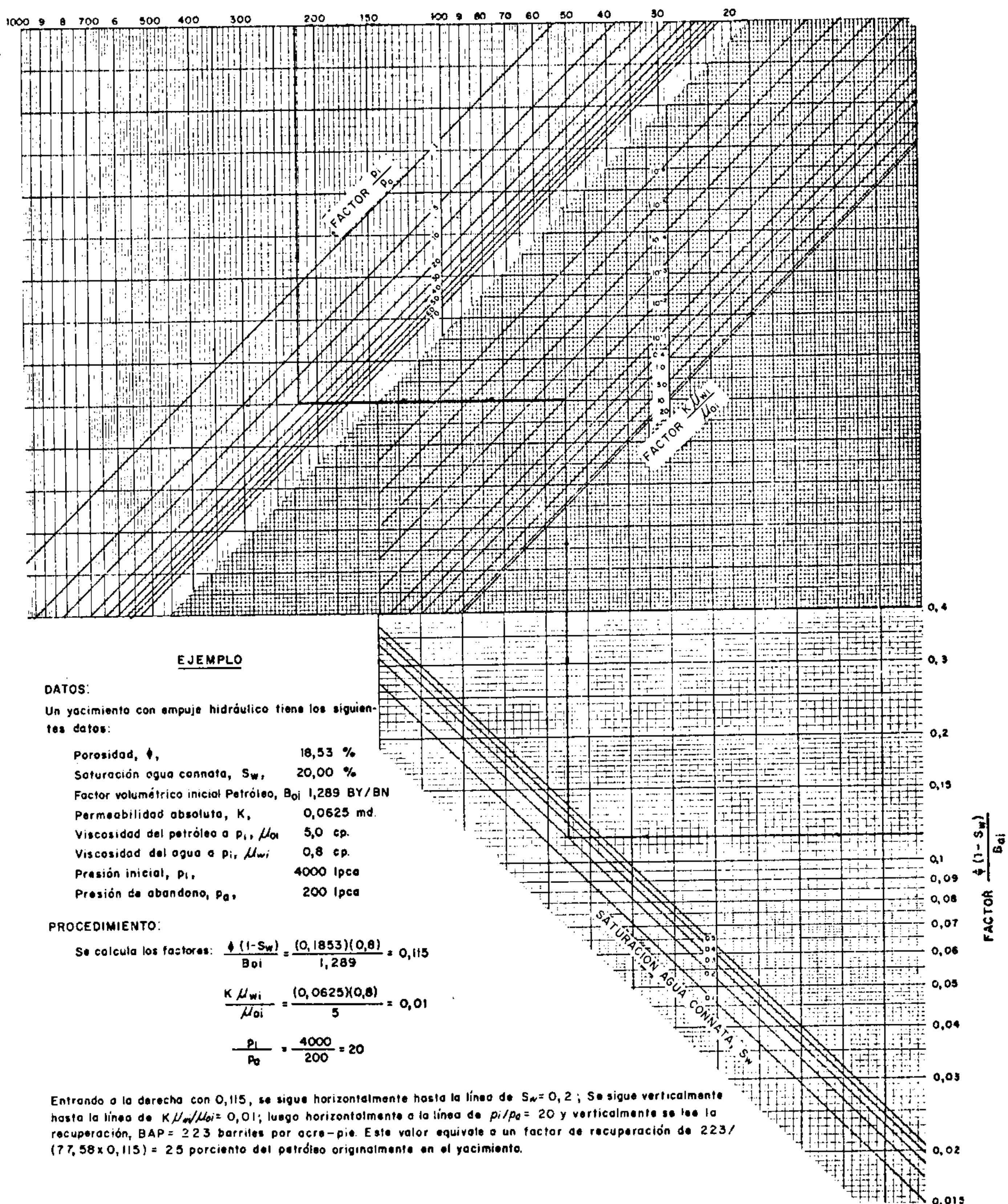
$$\log(BAF) = \log(4259) + 1{,}0422 \log\left[\frac{\phi(1-S_w)}{B_{oi}}\right] + 0{,}0770 \log\left[\frac{k\mu_{wi}}{\mu_{oi}}\right] - 0{,}1903 \log(S_w) - 0{,}2159 \log\left[\frac{p_i}{p_a}\right] \qquad (3)$$

$$\log(RE) = \log(54{,}898) + 0{,}0422 \log\left[\frac{\phi(1-S_w)}{B_{oi}}\right] + 0{,}0770 \log\left[\frac{k\mu_{oi}}{\mu_{oi}}\right] - 0{,}1903 \log(S_w) - 0{,}2159 \log\left[\frac{p_i}{p_a}\right] \qquad (4)$$

El estudio en mención determinó un factor de recuperación promedio, RE, de 51,1 por ciento para yacimientos con empuje hidráulico en areniscas y un valor de 43,6 por ciento para yacimientos con empuje hidráulico en calizas y dolomitas.

La Ec.(1), o su equivalente la Ec.(3), se ha resuelto a través de un nomograma con el fin de facilitar los cálculos. Tal nomograma aparece en la siguiente página. El ejemplo incluido allí, ilustra claramente el procedimiento seguido con el fin de obtener el factor de recuperación, BAP, en barriles normales por acre-pie de yacimiento. So-

FACTOR DE RECUPERACION, BAP, BARRILES NORMALES POR ACRE-PIE.



EJEMPLO

DATOS:

Un yacimiento con empuje hidráulico tiene los siguientes datos:

Porosidad, ϕ,	18,53 %
Saturación agua connata, S_w,	20,00 %
Factor volumétrico inicial Petróleo, B_{oi}	1,289 BY/BN
Permeabilidad absoluta, K,	0,0625 md.
Viscosidad del petróleo a p_i, μ_{oi}	5,0 cp.
Viscosidad del agua a p_i, μ_{wi}	0,8 cp.
Presión inicial, p_i,	4000 lpca
Presión de abandono, p_a,	200 lpca

PROCEDIMIENTO:

Se calcula los factores: $\frac{\phi\,(1-S_w)}{B_{oi}} = \frac{(0,1853)(0,8)}{1,289} = 0,115$

$$\frac{K\,\mu_{wi}}{\mu_{oi}} = \frac{(0,0625)(0,8)}{5} = 0,01$$

$$\frac{p_i}{p_a} = \frac{4000}{200} = 20$$

Entrando a la derecha con 0,115, se sigue horizontalmente hasta la línea de $S_w = 0,2$; Se sigue verticalmente hasta la línea de $K\mu_{wi}/\mu_{oi} = 0,01$; luego horizontalmente a la línea de $p_i/p_a = 20$ y verticalmente se lee la recuperación, BAP = 223 barriles por acre-pie. Este valor equivale a un factor de recuperación de 223/(77,58 x 0,115) = 25 porciento del petróleo originalmente en el yacimiento.

Nomograma Para Determinar el Factor de Recuperación en Yacimientos con Empuje Hidráulico.

lo es necesario conocer los factores $\phi(1-S_w)/B_{oi}$, S_w, $k\mu_{wi}/\mu_{oi}$ y p_i/p_a. Siguiendo el camino indicado por las flechas, se lee directamente el valor de BAP.

Para determinar el factor de recuperación, RE, como porcentaje del petróleo originalmente en el yacimiento, basta dividir el resultado obtenido del nomograma, BAP, por el factor $77{,}58\phi(1-S_w)/B_{oi}$; pero ya que el término $\phi(1-S_w)/B_{oi}$ ha tenido que calcularse para entrar al nomograma, es muy sencillo la obtención de RE. Analíticamente,

$$RE = \frac{BAP}{77{,}58\left[\dfrac{\phi(1-S_w)}{B_{oi}}\right]}$$

Esta relación puede establecerse fácilmente comparando las Ec.s(1) y (2). El ejemplo incluido en el nomograma, ilustra la obtención de RE a partir de BAP.

Rata de Producción para Máxima Eficiencia.

Este término se conoce comunmente en la literatura como MER (del ingles Maximum Efficient Rate). Es un término muy disctutido[18,19] y debe tenerse en cuenta especialmente en yacimientos con empuje hidráulico.

Es lógico suponer que en un yacimientos donde existe una intrusión activa de agua, habrá una rata de producción de petróleo ideal, en

tal forma que ocurra el máximo desplazamiento de petróleo del área barrida por el agua. Por tanto, puede decirse que un yacimiento con empuje hidráulico es sensitivo a la rata de producción de petróleo. Varios factores deben tenerse presente: (1) la intrusión de agua puede ser pequeña comparada con la producción de petróleo, permitiendo que ocurra segregación, (2) la eficiencia de desplazamiento debido al agua de intrusión disminuye a medida que la rata de producción aumenta, (3) a altas ratas de producción de petróleo, las fuerzas capilares pueden llegar a ser insignificantes, en tal forma que el desplazamiento capilar de petróleo de zonas de baja permeabilidad sea prácticamente nulo, (4) a medida que la rata de producción aumenta, el contacto agua-petróleo se distorciona, bien sea por conificación o inclinación.

En general, la rata de producción para máxima eficiencia, puede definirse como la máxima cantidad de petróleo por unidad de tiempo que puede permitirse producir de un yacimiento, sin pérdida significante en la producción total. Tal rata de producción debe ser lo suficientemente baja, en tal forma que:

(1) En su mayoría el agua de intrusión reemplace el petróleo producido, es decir, impida que el empuje hidráulico disminuya o desaparezca su acción.

(2) Ocurra una alta eficiencia de desplazamiento en la zona invadida por agua de intrusión.

(3) Las fuerzas capilares dezplacen el petróleo de zonas de baja permeabilidad.

(4) El contacto agua-petróleo avance lo más horizontalmente posible.

DEDUCCION DE LA ECUACION DE DIFUSIVIDAD.

En esta sección se hará la deducción de la ecuación de difusividad para líquidos que fluyen a través de un medio poroso tanto en el sistema de coordenadas cartesianas con en el sistema de corrdenadas radiales.

La ecuación de difusividad que describe matemáticamente el flujo de una sola fase a través de un medio poroso, es la combinación de tres ecuaciones: (a) la Ecuación de Continuidad, que no es más que un balance de masa o una forma diferencial de la Ley de Conservación de Masa, (b) la Ley de Darcy y (c) la Ecuación de Estado, que describe el tipo de fluido en movimiento.

Coordenadas Cartesianas.

Considérese un elemento de un medio pororso homogéneo, tal como el ilustrado en la Fig.5, donde ocurre flujo en tres direcciones, x, y, z. Durante un instante cualesquiera de observación, Δt, determinado flujo entra al sistema a través de las secciones (áreas) $(\Delta y\Delta z)$, $(\Delta x\Delta z)$ y $(\Delta x\Delta y)$ y durante el mismo instante de observación, Δt, determinado flujo sale a través de estas mismas áreas en las secciones de salida localizadas a distancias Δx, Δy y Δz de las secciones de entrada.

Si u_i $(i = x, y, z)$ es la velocidad volumétrica de flujo (rata de flujo por área unitaria, $(L^3/T)L^2 = L/T$) en la dirección i y ρ la densidad del fluido, M/L^3, el flujo de masa por área unitaria en la dirección i será $\rho u_i = (M/T)/L^2$. Aplicando la Ley de Conservación de Masa a este elemento, puede escribirse para el tiempo de observación, Δt,

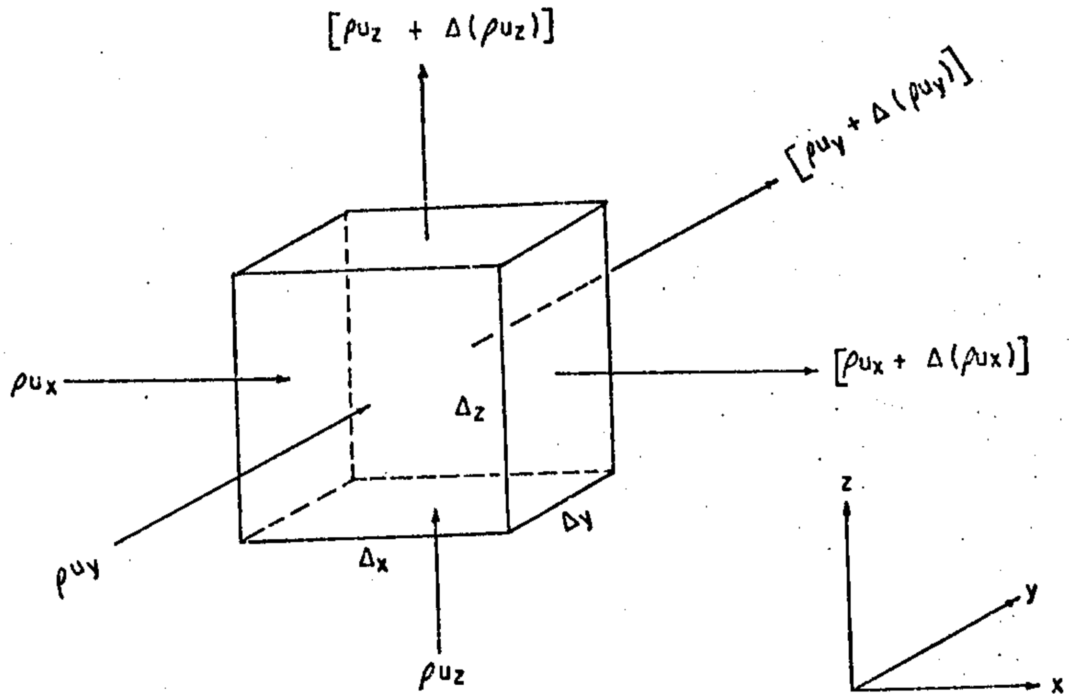


Fig. 5- Elemento de volumen de un medio poroso en tres dimensiones para deducir la ecuación de continuidad en coordenadas cartesianas.

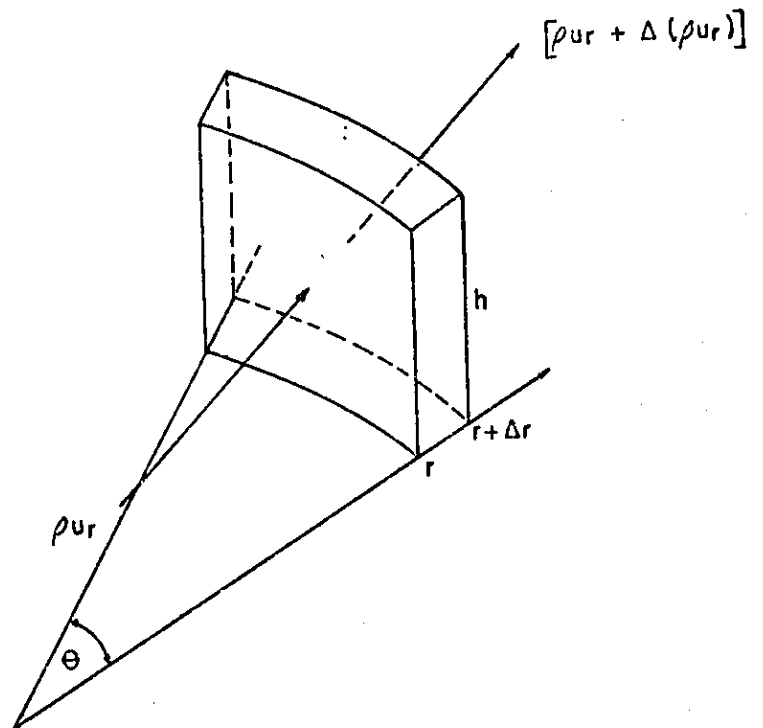


Fig. 6 - Elemento de volumen de un medio poroso para deducir la ecuación de continuidad en un sistema radial horizontal.

$$\begin{bmatrix}\text{Cantidad de masa que} \\ \text{entra al elemento du-} \\ \text{rante el tiempo } \Delta t.\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{Cantidad de masa que} \\ \text{sale del elemento du-} \\ \text{rante el tiempo } \Delta t.\end{bmatrix}$$

$$\pm \begin{bmatrix}\text{Cantidad neta de masa} \\ \text{introducida (o retira-} \\ \text{da) al elemento por} \\ \text{fuentes o (sumideros),} \\ \text{durante el tiempo } \Delta t.\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Acumulación de masa en} \\ \text{el elemento durante el} \\ \text{tiempo } \Delta t.\end{bmatrix}$$

Aplicando este ley a cada de las direcciones x, y, z, la masa total que entra al elemento será el flujo de masa por área unitaria, ρu_i, multiplicada por el área correspondiente, $(\Delta z \Delta y)$, $(\Delta z \Delta x)$ o $(\Delta x \Delta y)$ por el instante de observación Δt. Aplicando lo anterior en la dirección x, la cantidad de masa que entra al elemento será,

$$(\rho u_x)\ (\Delta y \Delta z)(\Delta t)$$

y la cantidad de masa que sale durante el mismo instante de observación Δt, será,

$$[\rho u_x + \Delta(\rho u_x)](\Delta y \Delta z)(\Delta t)$$

Asumiendo que no entra ni sale fluido del elemento a través de fuentes o sumideros, la cantidad neta de masa acumulada en el elemento en la dirección x será la cantidad de masa que entra menos la cantidad de masa que sale en el instante de observación Δt, o sea,

$$-\ [\Delta(\rho u_x)(\Delta y \Delta z)(\Delta t)] = -\ \Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{\Delta(\rho u_x)}{\Delta x}\right]$$

Haciendo balances de masa similares para las direcciones y, z, la acumulación total en el elemento será la suma de tales acumulaciones,

$$-\ \Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{\Delta(\rho u_x)}{\Delta x} + \frac{\Delta(\rho u_y)}{\Delta y} + \frac{\Delta(\rho u_z)}{\Delta z}\right]\Delta t \qquad (5)$$

Por otro lado, la acumulación de masa en el elemento durante el instante de observación Δt, puede obtenerse en forma diferente. A un tiempo t cualesquiera, la masa de fluido existente en el elemento es,

$$(\Delta x \Delta y \Delta z)(\phi)(\rho)]_t$$

y a un tiempo $t+\Delta t$, la masa de fluido existente en el elemento será,

$$(\Delta x \Delta y \Delta z)(\phi)(\rho)]_{t+\Delta t}$$

Por tanto, la acumulación de masa durante el instante Δt, será la cantidad de masa al tiempo $(t+\Delta t)$ menos la cantidad de masa al tiempo t,

$$[(\Delta x \Delta y \Delta z)(\phi)(\rho)] - [(\Delta x \Delta y \Delta z)(\phi)(\rho)]_t$$

Asumiendo que las dimensiones del elemento no varian durante el Δt, la expresión anterior puede escribirse,

$$\Delta x \Delta y \Delta z \left[(\phi\rho)_{t+\Delta t} - (\phi\rho)_t \right] \qquad (6)$$

Las Ecs.(5) y (6) individualmente representan la acumulación de masa en el elemento durante el instante Δt. Igualándolas y simplificando,

$$- \left[\frac{\Delta(\rho u_x)}{\Delta x} + \frac{\Delta(\rho u_y)}{\Delta y} + \frac{\Delta(\rho u_z)}{\Delta z} \right] = \left[\frac{(\phi\rho)_{t+\Delta t} - (\phi\rho)_t}{\Delta t} \right]$$

En el límite, cuando Δx, Δy, Δz y Δt tienden a cero, puede escribirse,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = - \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) \qquad (7)$$

La expresión anterior es la ecuación de continuidad en coordenadas cartesianas para flujo monofásico a través de un medio poroso.

El siguiente paso en la deducción de la ecuación de difusividad consiste en introducir la Ley de Darcy a la Ec.(7). Para el flujo en las direcciones x, y, z, esta ley puede escribirse,

$$u_x = -\frac{k_x}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$u_y = -\frac{k_y}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$u_z = -\frac{k_z}{\mu}\left[\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g\right]$$

Sustituyendo en la Ec.(7),

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k_x\rho}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{k_y\rho}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{k_z\rho}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g\right)\right] = \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) \qquad (8)$$

Finalmente, la adición de la ecuación de estado en la Ec.(8), trae como resultado la ecuación de difusividad. Para obtener esta ecuación para líquidos, se parte de la definición del factor de compresibilidad isotérmica. Este factor, se define como el cambio en volumen de fluido por cambio unitario de presión por volumen unitario. En forma analítica puede escribirse,

$$c = -\left[\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\right]_T$$

o en función de densidad puede escribirse,

$$c = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p}\right]_T$$

$$\int_{p_o}^{p} dp = \int_{\rho_o}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho}$$

$$c(p-p_o) = \ln\left[\frac{\rho}{\rho_o}\right] \qquad (9)$$

$$\rho = \rho_o \, e^{c(p-p_o)} \qquad (10)$$

La Ec.(9) es la ecuación de estado para un fluído de compresibilidad constante. Extrictamente, el factor de compresibilidad es función de presión, pero para líquidos es razonable suponer el factor de compresibilidad, c, constante dentro del intervalo de presión de interés.

De la Ec.(9), puede escribirse,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{c\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{1}{c\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Efectuando las derivadas indicadas en la Ec.(8), sustituyendo los valores de la Ec.(11), considerando la viscosidad constante y despreciando las fuerzas de la gravedad, puede escribirse,

$$\left[k_x\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k_y\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k_z\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right] + c\left[k_x\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + k_y\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + k_z\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\right] +$$

$$+ \left[\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial k_x}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial k_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial k_z}{\partial z} \right] = \phi \mu c \frac{\partial p}{\partial t} + \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (12$$

Si además, c es un valor pequeño (en el orden de 10^{-6} lpc^{-1}), el medio es isotrópico, es decir, la permeabilidad y porosidad constantes en cualquier parte del sistema y los gradientes de presión son lo suficientemente pequeños para que los términos al cuadrado puedan despreciarse, la Ec.(12) puede escribirse,

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1$$

Esta es una de las formas más conocidas de la ecuación de difusividad que gobierna el flujo de una sola fase a través de un medio poroso, expresada en coordenadas cartesianas y flujo en tres direcciones. La solución de esta ecuación permite obtener la distribución de presión como función de las tres direcciones x, y, z, y a un tiempo t, cualesquiera.

Si el flujo es lineal, es decir, ocurre sólo en una sola dirección, por ejemplo, en un plano horizontal, los términos en z e y son iguales a cero, y la ecuación de difusividad en este caso será,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (14$$

Esta es la ecuación básica aplicada a sistemas lineales de intrusión de agua, como se verá más adelante.

Coordenadas Radiales

Quizás de más uso en ingeniería de petróleo sea la ecuación de difusividad escrita para un sistema radial ortogonal, ya que

el flujo (o inyección) en un pozo que penetra completamente la formación sigue condiciones de flujo radial. Para deducir tal ecuación en un sistema radial, puede partirse de la Ec.(13) en coordenadas cartesianas y usando métodos puramente matemáticos (operador de Laplace, etc), se hace la transformación al sistema radial. Sin embargo, puede hacerse una deducción semejante a la anterior para coordenadas cartesianas. La Fig.6 ilustra un elemento del medio poroso en un sistema radial. El flujo se considera horizontal y radial en la misma dirección en que aumenta r,

Si u_r es la velocidad volumétrica de flujo radial, el flujo de masa por área unitaria será (ρu_r). En forma similar a la deducción anterior, la masa que entra al elemento a través del área lateral del cilindro de radio, r, durante un instante de observación, Δt, será,

$$(\rho u_r)\ (\theta r h)\ (\Delta t)$$

y la cantidad de masa que sale del elemento a través del área lateral del cilindro de radio, $(r+\Delta r)$, será,

$$\left[\rho u_r+\Delta(\rho u_r)\right]\ \left[\theta(r+\Delta r)h\right](\Delta t)$$

Por tanto, asumiendo que no sale ni entra masa al elemento a través de fuentes o sumideros, la cantidad neta de masa que se acumula en el elemento durante el instante de observación Δt, será la diferencia de lo que entra, menos lo que sale ,

$$\theta h\left[\rho u_r r - \left[\rho u_r + \Delta(\rho u_r)\right](r+\Delta r)\right]\Delta t \qquad (15)$$

Por otro lado, la acumulación de masa en el elemento durante el instante de observación Δt, puede obtenerse en forma diferente.

A un tiempo t cualesquiera, la masa de fluido en el elemento es,

$$(\theta r\Delta r)(h)(\phi)(\rho)\Big]_{t}$$

y a un tiempo $(t+\Delta t)$, la masa de fluido en elemento será,

$$(\theta r\Delta r)(h)(\phi)(\rho)\Big]_{t+\Delta t}$$

por lo tanto, la acumulación de masa durante el instante Δt, será la cantidad de masa al tiempo $(t+\Delta t)$ menos la cantidad de masa al tiempo t,

$$(\theta r\Delta r)(h)(\phi)(\rho)\Big]_{t+\Delta t} - (\theta r\Delta r)(h)(\phi)(\rho)\Big]_{t} \quad (16$$

Las Ecs.(15) y (16) individualmente representan la acumulación de masa en el elemento durante el instante Δt. Igualándolas, eliminando θh de ambos lados, efectuando y transponiendo términos, puede escribirse,

$$-\frac{1}{r\Delta r}\left[\rho u_r \Delta r + r\Delta(\rho u_r) + \Delta r\Delta(\rho u_r)\right] = \frac{\phi\rho\big]_{t+\Delta t} - \phi\rho\big]_{t}}{\Delta t} \quad (17$$

ya que el producto de los términos $(\Delta r)(\Delta(\rho u_r))$ es muy pequeño, pude considerarse igual a cero y la ecuación anterior puede escribirse,

$$\frac{1}{r}\left[\rho u_r + r\,\frac{\Delta(\rho u_r)}{\Delta r}\right] = -\,\frac{\Delta(\phi\rho)}{\Delta t} \quad (18$$

tomando el límite, cuando Δr y Δt tienden a cero, puede escribirse,

$$\frac{1}{r}\left[\rho u_r + \frac{\partial(\rho u_r)}{\partial r}\right] = -\,\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) \quad (19$$

$$\frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_r) = -\ \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) \qquad (20)$$

Esta es la ecuación de continuidad para flujo radial. Si en esta ecuación se reemplaza la ecuación para la velocidad volumétrica de flujo, u_r, dada por Darcy,

$$u_r = -\ \frac{k_r}{u}\ \frac{\partial p}{\partial r} \qquad (21)$$

resulta,

$$\frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\rho k_r}{\mu}\ \frac{\partial p}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) \qquad (22)$$

Finalmente, introduciendo la ecuación de estado para líquidos, Ec.(9), en su forma diferencial respecto a r, se obtiene,

$$\frac{1}{r}\ \frac{\partial p}{\partial r}\left(r\ \frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{k_r}\ \frac{\partial k_r}{\partial r}\ \frac{\partial p}{\partial r} + c\left[\frac{\partial p}{\partial r}\right]^2 = \frac{\phi\mu c}{k_r}\ \frac{\partial p}{\partial t} +$$

$$+\ \frac{\mu}{k_r}\ \frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad (2$$

Si se asume un medio isotrópico, es decir, que la permeabilidad y porosidad sean constantes en cualquier parte y dirección del sistema, se puede escribir,

$$\frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r\ \frac{\partial p}{\partial r}\right) + c\left[\frac{\partial p}{\partial r}\right]^2 = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\ \frac{\partial p}{\partial r} + c\left[\frac{\partial p}{\partial r}\right]^2 =$$

$$= \frac{\phi\mu c}{k}\ \frac{\partial p}{\partial t} \qquad (24$$

Si además, se considera el valor de c pequeño (en el orden de 10^{-6} lpc-1) y por otra parte puede asumirse un gradiente de presión peque

ño en cualquier parte del yacimiento, el término $c(\partial p/\partial r)$, puede considerarse igual a cero. En este caso, la ecuación resultante es,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\phi \mu c}{k}\frac{\partial p}{\partial t} \qquad (25)$$

Esta expresión es comunmente conocida como ecuación de difusividad para líquidos de baja compresibilidad.

Debe tenerse en mente las suposiciones que incluyen las ecuaciones deducidas, Ecs.(13) y (25): sistema isotrópico con porosidad y permeabilidad constantes, viscosidad del fluído constante, no se consideran las fuerzas de la gravedad, flujo viscoso, compresibilidad pequeña y constante, gradiente pequeño a través del sistema y una sola fase. Ecuaciones similares pueden deducirse[18] para otros fluídos (gases) y cuando ocurre flujo de dos o tres fases (petróleo, agua, gas).

SOLUCIONES DE LA ECUACION DE DIFUSIVIDAD APLICADA A ACUIFEROS

Las soluciones de las ecuaciones de difusividad aplicadas a sistemas yacimiento-acuífero más comunmente conocidas, se refieren a la solución de las Ecs.(14) y (25), o sea modelos lineales y radiales homogéneos en una sola dimensión y donde fluye una sola fase. Con el uso de computadores digitales, día a día se incorporan a la literatura petrolera soluciones particulares (modelos) de las ecuaciones de difusividad en diferentes formas: una, dos y tres dimensiones, una dos y tres fases y cambio en propiedades, tales como porosidad, permeabilidad, espesor, etc. En estas notas, se cubrirán las principales soluciones de las Ecs.(14) y (25) existentes en la literatura, para sistemas homogéneos y una sola fase y otras soluciones variando una o algunas de las propiedades tales como porosidad, permeabilidad, espesor, y

compresibilidad.

Acuíferos Lineales Homogéneos.

Como se mencionó anteriormente en la sección de Generalidades, algunas veces en la práctica, la geometría de un sistema yacimiento-acuífero se aproxima mejor a un sistema lineal que a un sistema radial, principalmente cuando el sistema está limitado por fallas. La ecuación aplicable en tal sistema es la Es.(14),

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \tag{14}$$

Con el fin de determinar las diferentes soluciones de esta ecuación, es necesario fijar primero el tamaño del sistema (acuífero), como también las condiciones iniciales y las condiciones de límite (contorno). Los tipos generales de soluciones, se refieren a acuíferos infinitos y a acuíferos finitos (limitados). Luego, a su vez, para cada tipo existen varias soluciones, de acuerdo a las condiciones iniciales y de límite. La Fig.9 presenta esquemáticamente las condiciones de límite de las soluciones principales del sistema yacimiento-acuífero lineal, según los modelos representados en las Figs.7 y 8. La Fig.9 resume seis soluciones: dos para acuíferos infinitos y cuatro para acuíferos finitos. En ambos casos, deben especificarse, tanto las condiciones iniciales, como las condiciones de límite.

Condiciones Iniciales.- Tanto en acuíferos infinitos como en acuíferos finitos, la condición inicial, es decir cuando el tiempo, $t=0$, considera una presión inicial, p_i, constante para todo valor de x. Analíticamente, $p(x,0) = p_i$.

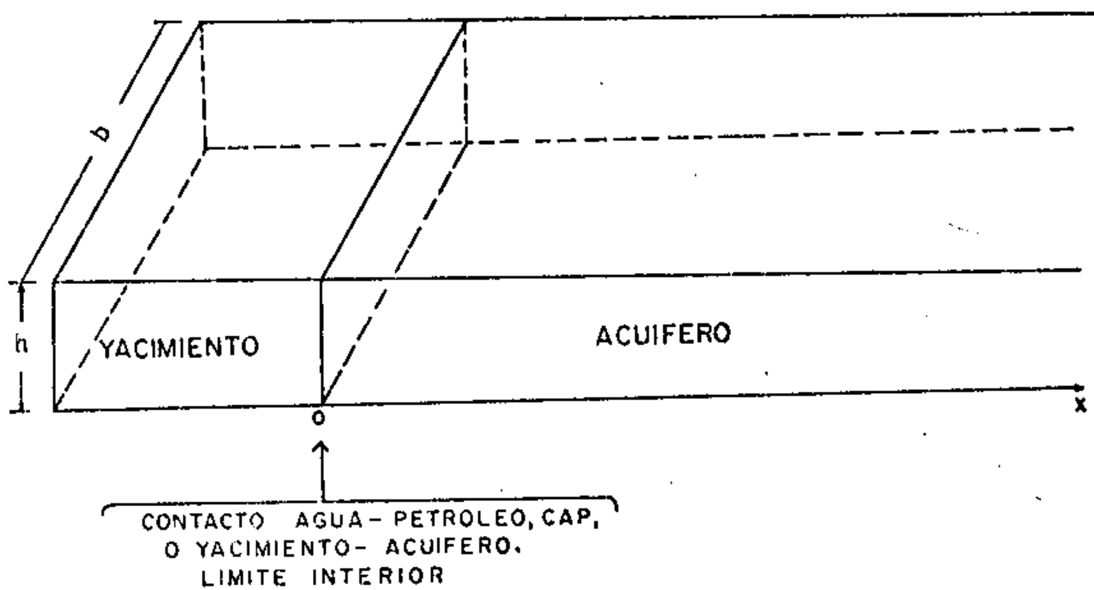


Fig. 7- Sistema lineal yacimiento- acuífero infinito

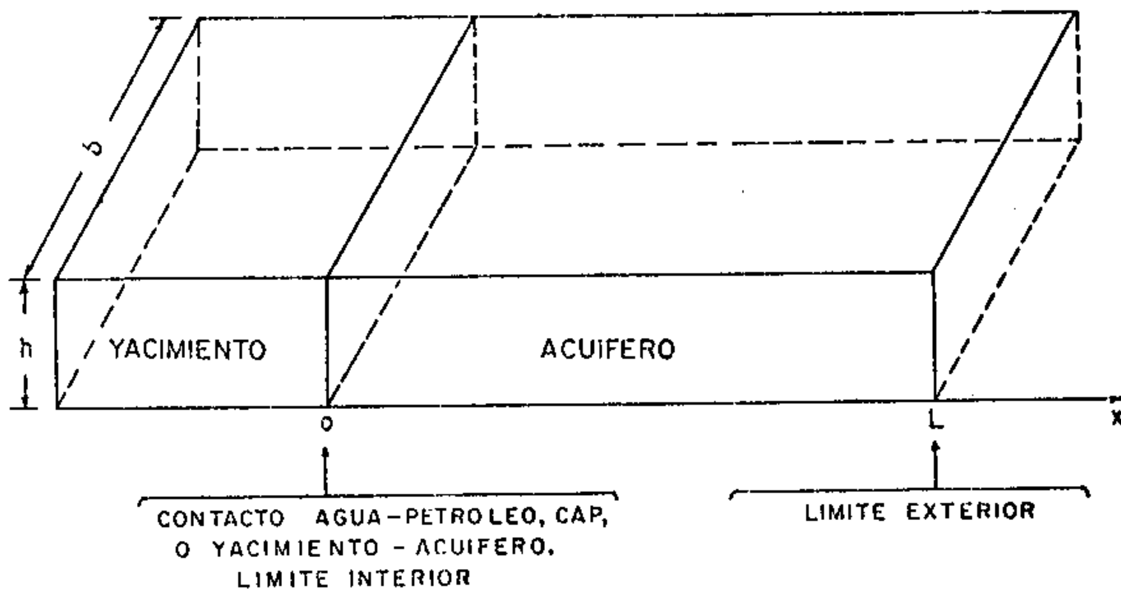


Fig. 8- Sistema lineal yacimiento-acuífero finito.

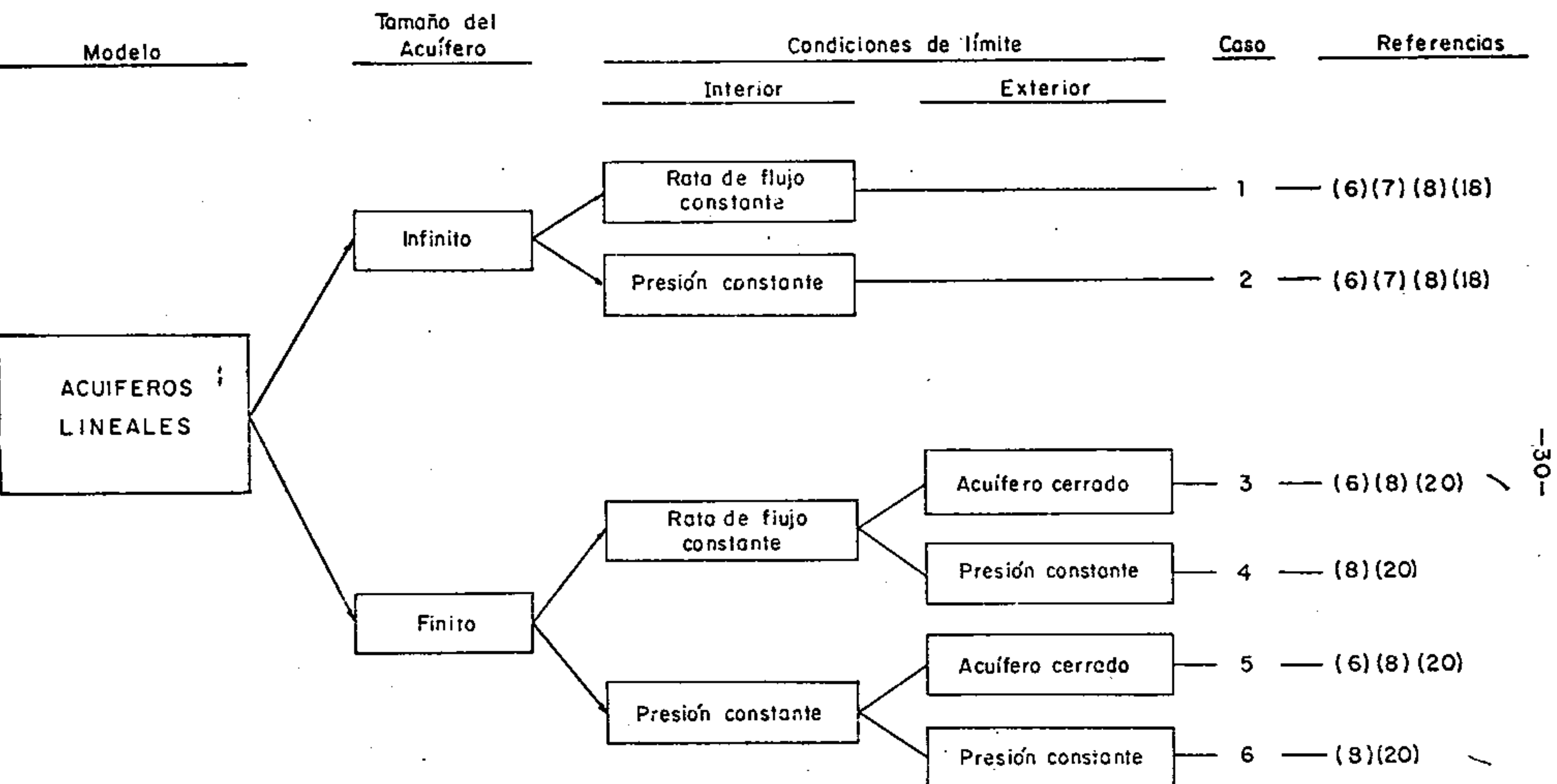


Fig. 9—Soluciones de la ecuación de difusividad para acuíferos lineales.

Condiciones de Límite (Contorno).-

I - Acuíferos Infinitos

Caso 1 - Rata de intrusión constante en el contacto agua-petroleo (acuífero-yacimiento). Es el denominado Caso de Rata Terminal Constante. Analíticamente, las condiciones de límite son:*

a) $(e)_{cap} = \text{constante} = \dfrac{kbh}{\mu}\left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)_{cap}$ para $t > 0$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{cap} = \frac{e\mu}{kbh} = \text{constante, para } t > 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0,t) = \frac{e\mu}{kbh}$$

b) $p \rightarrow p_i$ cuando $L \rightarrow \infty$ todo t.

$$p(\infty,t) = p_i$$

Caso 2 - Presión constante en el contacto agua-petróleo (acuífero-yacimiento). Es el denominado Caso de Presión Terminal Constante. Analíticamente, las condiciones de límite son,

a) $(p)_{cap}$ = constante, para $t > 0$

---

* En las ecuaciones cubiertas en este estudio, e expresa la rata de intrusión de agua al yacimiento, dWe/dt. De acuerdo a la nomenclatura de la AIME[17], debe ser e_w, pero para presentar las ecuaciones más simplificadas se usa simplemente e. Cuando se trata de un sistema de un yacimiento que fluye a un pozo, en lugar de e se usa q. En forma similar se usa μ y k en lugar de μ_w y k_w. El significado de cap es: contacto agua-petróleo.

$$(\Delta p)_{cap} = (p_i - p)_{cap} = \text{constante, para } t > 0.$$

$$p(0,t) = \text{constante}$$

$$\Delta p(0,t_D) = \text{constante}$$

b) Igual que la Condición b) del Caso 1

II - Acuíferos Finitos (Limitados), x=L

Caso 3 - Rata de intrusión constante en el límite interior (contacto agua-petróleo) y acuífero cerrado, es decir, rata de flujo en el límite exterior igual a cero. Analíticamente, las condiciones de límite son:

a) Igual a la Condición a) del Caso 1

b) $(e)_L = 0$ para todo t

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0 \text{ para todo } t$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(L,t) = 0$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)(L,t_D) = 0$$

Caso 4 - Rata de intrusión constante en el límite interior (contacto agua-petróleo) y presión constante en el límite exterior. Analíticamente, las condiciones de límite son:

a) Igual a la Condición a) del Caso 1

b) $p = p_i$ para x=L y para todo t

$$p(L,t) = pi$$

$$p(L,t_D) = p_i$$

Caso 5 - Presión constante en el límite interior (contacto agua-petróleo) y acuífero cerrado, es decir, rata de flujo en el límite exterior igual a cero. Analíticamente, las condiciones de límite son:

a) Igual a la Condición a) del Caso 2

b) Igual a la Condición b) del Caso 3

Caso 6 - Presión constante en el límite interior (contacto agua-petróleo), lo mismo que en el límite exterior. Analíticamente, las condiciones de límite son:

a) Igual a la Condición a) del Caso 2

b) Igual a la Condición b) del caso 4.

Varios autores [7, 8, 9, 19, 20, 21] han estudiado uno o varios de los casos descritos. Entre ellos, Nabor y Barham[9] presentan en forma muy práctica soluciones de la Ec.(14) para los seis casos considerados en acuíferos homogéneos. Tales soluciones se presentan a continuación.

Caso 1:

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{e\mu}{kbh}\left[2\sqrt{\frac{kt}{\pi\phi\mu c}}\right] \tag{26}$$

Caso 2:

$$We = \phi bhc(\Delta p)\left[2\sqrt{\frac{kt}{\pi\phi\mu c}}\right] \tag{27}$$

Caso 3:

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{e\mu}{kbh}\left[\left(\frac{L}{3} + \frac{kt}{\phi\mu cL}\right) - \frac{2L}{\pi^2}\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{-\frac{n^2\pi^2 kt}{\phi\mu cL^2}}\right]$$

donde n = 1, 2, 3, 4, ... ∞

Caso 4:

$$\Delta p = (pi-p) = \frac{e\mu}{kbh}\left[L - \frac{8L}{\pi^2}\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{-\frac{n^2\pi^2kt}{4\phi\mu cL^2}}\right] \quad (29)$$

donde n es impar, n = 1, 3, 5, ... ∞

Caso 5:

$$We = \phi bhc(\Delta p)\left[L - \frac{8L}{\pi^2}\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{-\frac{n^2\pi^2kt}{4\phi\mu cL^2}}\right] \quad (30)$$

donde n es impar, n = 1, 3, 5, ... ∞

Caso 6:

$$We = \phi bhc(\Delta p)\left[\left(\frac{L}{3} + \frac{kt}{\phi\mu cL}\right) - \frac{2L}{\pi^2}\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{-\frac{n^2\pi^2kt}{\phi\mu cL^2}}\right] \quad (31$$

donde n = 1, 2, 3, 4, ... ∞

Las ecuaciones anteriores pueden simplificarse bastante, si se introduce el término tiempo adimensional, definido por,

$$t_D = \frac{0,006323kt}{\phi\mu cL^2}$$

donde los términos se expresan en unidades prácticas: k=md; t=días; ϕ=fracción; μ=cp; c = vol/vol/lpc; L=pies. El término L, para acuí

ros infinitos, puede tomarse un valor cualesquiera. Podría tomarse un valor imitario para simplificar los cálculos. En el caso de acuíferos finitos, (limitados), el valor de L es la longitud del acuífero. Además si se definen los siguientes factores $F_k(t_D)$ donde k = 0, 1/2, 1,

$$F_0(t_D) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{n^2\pi^2 t_D}{4}} \qquad (32)$$

donde n = 1, 3, 5 ... ∞

$$F_{1/2}(t_D) = 2 \sqrt{\frac{t_D}{\pi}} \qquad (33)$$

$$F_1(t_D) = (t_D + \frac{1}{3}) - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2\pi^2 t_D} \qquad (34)$$

donde n = 1, 2, 3, 4, ... ∞

Las Ecs.(26) a (31), en unidades prácticas, pueden escribirse,

Caso 1:

$$\Delta p = (pi-p) = \frac{887,58\ e\mu L}{kbh} F_{1/2}(t_D) \qquad (26a)$$

Caso 2:

$$We = \frac{\phi bhLc(\Delta p)}{5,615} F_{1/2}(t_D) \qquad (27a)$$

Caso 3:

$$\Delta p = (pi-p) = \frac{887,58\ e\mu L}{kbh} F_1(t_D) \qquad (28a)$$

Caso 4:

$$\Delta p = (pi-p) = \frac{887,58\ e\mu L}{kbh} F_o(t_D) \qquad (29a)$$

Caso 5:

$$We = \frac{\phi bhLc(\Delta p)}{5,615} F_o(t_D) \qquad (30a)$$

Caso 6:

$$We = \frac{\phi bhlc(\Delta p)}{5,615} F_1(t_D) \qquad (31a)$$

Es interesante hacer un análisis de las funciones $F_k(t_D)$ Ecs. (32) a (34). Cuando t_D tiende a cero ($t_D \to 0$), la sumatoria de la Ec. (32) tiende a la suma de $1/n^2$ ($n = 1, 3, 5, \ldots \infty$), cuyo valor es $\pi^2/8$ Por tanto, el valor de $F_o(t_D) = 0$, cuando $t_D \to 0$. Cosa similar ocurre con la Ec.(34), ya que la sumatoria de $1/n^2$($n = 1, 2, 3, \ldots \infty$)es $\pi^2/6$ es decir, $F_1(t_D) = o$, cuando $t_D \to 0$. La Ec.(33), de hecho es cero, cua do $t_D \to 0$.

De otro lado, cuando $t_D \to \infty$, $F_o(t_D) \to 1,0$ y $F_1(t_D) \to (t_D + \frac{1}{3}$ es decir, llegan a ser lineales con t_D, lo que es de esperarse si se analizan las condiciones de límite de los acuíferos finitos. Por ejemplo, para el Caso 3, la caída de presión llega a ser lineal con tiempo tan pronto se alcance flujo semi-continuo, o sea para valores de tiemp (Fig.3), después que el disturbio debido a la intrusión, llegue al lím te exterior.

Para valores pequeños de t_D, $F_o(t_D)$ y $F_1(t_D)$ se acercan y llegan a ser iguales al valor de $F_{1/2}(t_D)$, tal como es de esperarse, ya que sistemas limitados se comportan como infinitos para valores peque-

ños de t_D. Tal cosa puede observarse en la Tabla I, donde se tabulan los valores de $F_k(t_D)$ para t_D entre 0,01 y 9,0. Además la Fig.10, presenta gráficamente los valores de $F_k(t_D)$ para t_D entre 0,02 y 10,0. De esta figura, puede observarse que el valor de las funciones $F_o(t_D)$ y $F_1(t_D)$ comienzan a desviarse del valor de la función $F_{1/2}(t_D)$, para tiempos adimensionales mayores de $t_D = 0,25$. En general, pueden usarse las siguientes reglas:

1) si $t_D \leq 0,25$:

$$F_o = F_{1/2} = F_1 = 2\sqrt{\frac{t_D}{\pi}} = 1,1284\sqrt{t_D}$$

2) Si $0,25 \leq t_D \leq 2,5$:
Usar Tabla I o Fig.10 para F_o y F_1. Para $F_{1/2}$ usar la Ec.(33).

3) Si $t_D \geq 2,5$:

$$F_o = 1,0$$

$$F_1 = t_D + \frac{1}{3}$$

Las ecuaciones presentandas para acuíferos lineales, se aplican bien sea para e o Δp constantes según el caso. El valor de e es la rata de intrusión de agua en el contacto agua-petróleo y en algunos casos puede considerarse igual a la rata de producción de petróleo, q, en BY/D, especialmente en acuíferos muy activos y cuando la presión del campo aún está por encima del punto de burbujeo. Si el valor de e o (Δp) varían con tiempo, es necesario aplicar el principio de superposición de efectos, el que discutirá más adelante y donde se presentarán las ecuaciones correspondientes.

TABLA I - Valores de las Funciones $F_k(t_D)$ para Acuífero Lineales Valores t_D entre 0,01 y 9,0.(Referencia 9). Fig. 10.

t_D	$F_o(t_D)$	$F_{\frac{1}{2}}(t_D)$	$F_1(t_D)$	t_D	$F_o(t_D)$	$F_{\frac{1}{2}}(t_D)$	$F_1(t_D)$
0,0100	0,1128379	0,1128379	0,1128379	0,31	0,6226824	0,6282549	0,6338276
0,0110	0,1183454	0,1183454	0,1183454	0,35	0,6581891	0,6675581	0,6769283
0,0125	0,1261566	0,1261566	0,1261566	0,40	0,6978819	0,7136496	0,7294231
0,0140	0,1335116	0,1335116	0,1335116	0,45	0,7329537	0,7569398	0,7809461
0,0160	0,1427299	0,1427299	0,1427299	0,50	0,7639503	0,7978846	0,8318760
0,0180	0,1513880	0,1513880	0,1513880	0,56	0,7964332	0,8444016	0,8925272
0,0200	0,1595769	0,1595769	0,1595769	0,62	0,8244456	0,8884866	0,9528875
0,0225	0,1692569	0,1692569	0,1692569	0,70	0,8558930	0,9440695	1,0331309
0,0250	0,1784124	0,17[illegible]4124	0,1784124	0,80	0,8874029	1,0092530	1,1332578
0,0280	0,1888139	0,[illegible]139	0,1888139	0,90	0,9120299	1,0704744	1,2333052
0,0310	0,1986717	0,1986717	0,1986717	1,00	0,9312597	1,128379	1,333323
0,0350	0,2111004	0,2111004	0,2111004	1,10	0,9462902	1,183454	1,433329
0,0400	0,2256758	0,2256758	0,2256758	1,25	0,9629049	1,261566	1,583332
0,0450	0,2393654	0,2393654	0,2393654	1,40	0,9743799	1,335116	1,733333
0,0500	0,2523133	0,2523133	0,2523133	1,60	0,9843590	1,427299	1,933333
0,0560	0,2670232	0,2670232	0,2670232	1,80	0,9904512	1,513880	2,133333
0,0620	0,2809641	0,2809641	0,2809641	2,00	0,9941705	1,595769	2,333333
0,0700	0,2985411	0,2985411	0,2985411	2,25	0,9968451	1,692569	2,583333
0,0800	0,3191537	0,3191538	0,3191539	2,50	0,9983024	1,784124	2,833333
0,0900	0,3385133	0,3385138	0,3385141	2,80	0,9991902	1,888139	3,133333
0,100	0,3568234	0,3568248	0,3568262	3,10	0,9996137	1,986717	3,433333
0,110	0,3742370	0,3742410	0,3742451	3,50	0,9998560	2,111004	3,833333
0,125	0,3989280	0,3989423	0,3989566	4,00	0,9999581	2,256758	4,333333
0,140	0,4221615	0,4222008	0,4222401	4,50	0,9999878	2,393654	4,833333
0,160	0,4512368	0,4513517	0,4514665	5,00	0,9999964	2,523133	5,333333
0,180	0,4784617	0,4787307	0,4789997	5,60	0,9999992	2,670232	5,933333
0,200	0,5040878	0,5046265	0,5051652	6,20	0,9999998	2,809641	6,533333
0,225	0,5341424	0,5352372	0,5262320	7,00	1,0000000	2,985411	7,333333
0,250	0,5622335	0,5641896	0,5661456	8,00	1,0000000	3,191538	8,333333
0,280	0,5936127	0,5970821	0,6005516	9,00	1,0000000	3,385138	9,333333

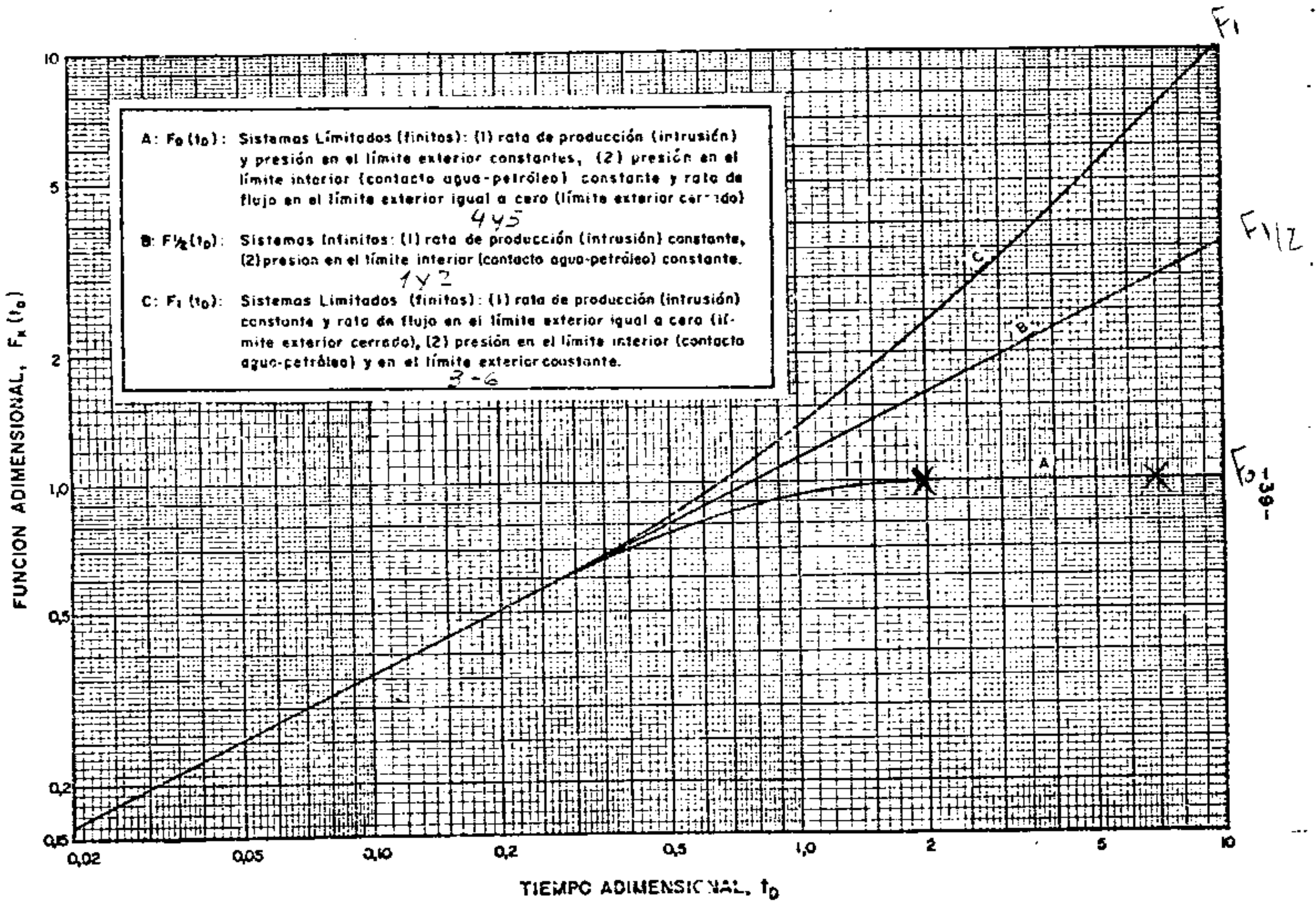


Fig. 10-Función adimensional, $F_K(t_D)$, contra tiempo adimensional, t_D, para sistemas lineales. (Referencia 9)

Acuíferos Lineales No-Homogéneos.

Mueller[21] presenta soluciones de la ecuación de difusividad para acuíferos lineales con variación de las siguientes propiedades: espesor, h; permeabilidad/viscosidad, k/μ y (porosidad)x(compresibilidad), ϕc. Considera que estos factores varían linealmente con distancia a partir del límite interior del acuífero (exterior del yacimiento) hasta el límite exterior del mismo. En base a esto, define el factor beta, β, en la siguiente forma,

$$\beta = \frac{\text{Valor del factor variante en el límite exterior}}{\text{Valor del mismo factor variante en el límite interior}}$$

Los resultados para varios casos de acuíferos lineales finitos se presentan gráficamente en las Figs.11 a 16. La Fig.11 presenta la solución para las condiciones de límite del Caso 3,(Fig.9), variando el espesor de acuerdo a los valores de β entre 0,25 y 4.0. Esta figura se usa para obtener el factor $F_1(t_D)$ de la Ec.(28a) (definido en este caso como $\Delta p(t_D)$ en función de t_D). La Fig.12 presenta la solución para las condiciones de límite del Caso 4,(Fig.9) variando el espesor de acuerdo a los valores de β entre 0,25 y 4,0. Esta figura se usa para obtener el factor $F_o(t_D)$ de la Ec.(29a) (definido también como $\Delta p(t_D)$) en función de t_D. Las Figs. 13, 14 y 15 presentan la solución para las condiciones de límite del Caso 5,(Fig.9), variando respectivamente el espesor, el factor k/μ y el factor ϕc, de acuerdo a los valores de β, entre 0,25 y 4,0 para el espesor y entre 0,1 y 10,0 para los factores k/μ y ϕc. Estas figuras se usan para obtener el factor $F_o(t_D)$ de la Ec.(30a)(definido también como $Q(t_D)$) en función de t_D. Finalmente, la Fig.16 presenta la solución para las condiciones de límite del Caso 6,(Fig.9),

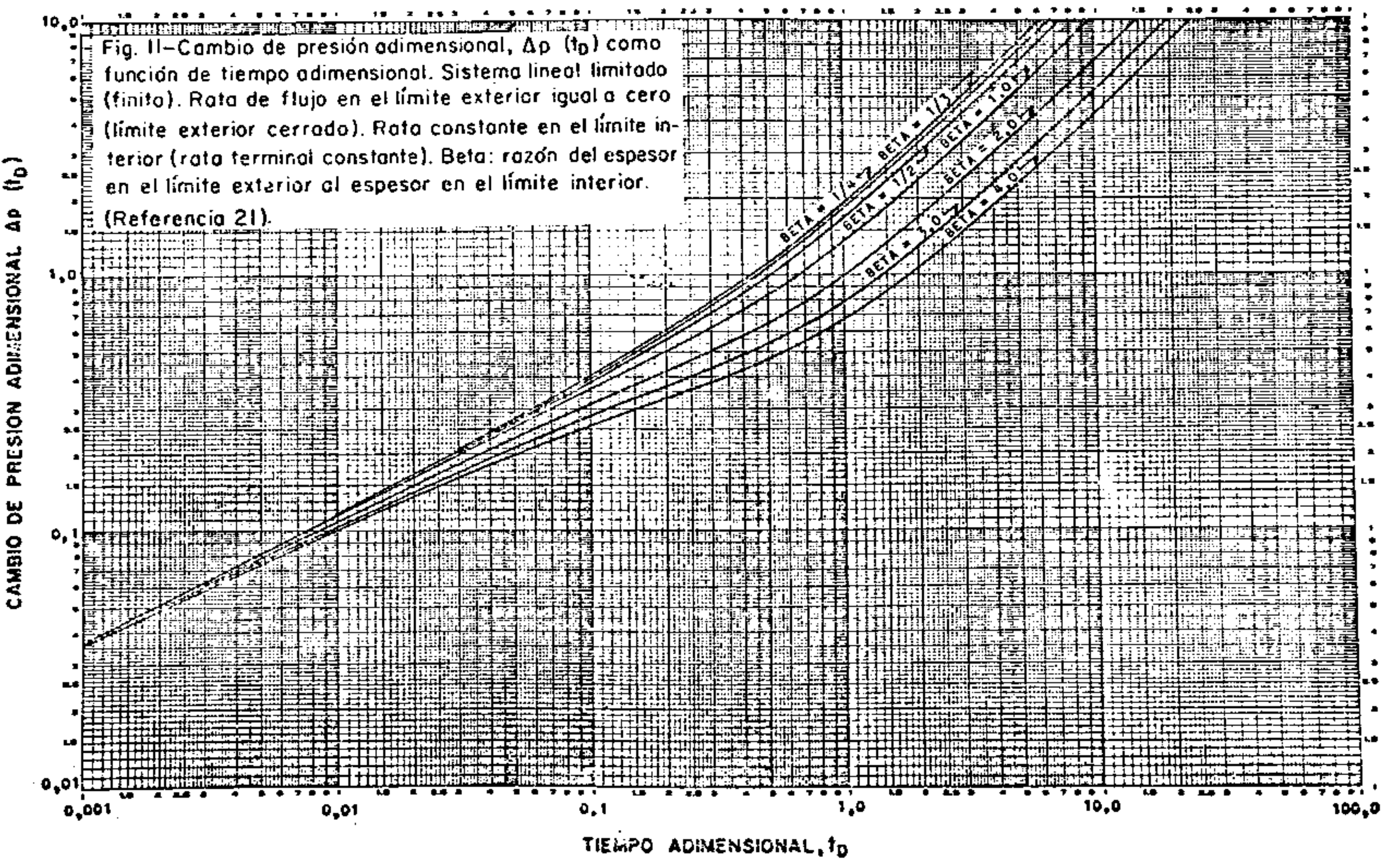


Fig. II–Cambio de presión adimensional, Δp (t_D) como función de tiempo adimensional. Sistema lineal limitado (finito). Rata de flujo en el límite exterior igual a cero (límite exterior cerrado). Rata constante en el límite interior (rata terminal constante). Beta: razón del espesor en el límite exterior al espesor en el límite interior. (Referencia 21).

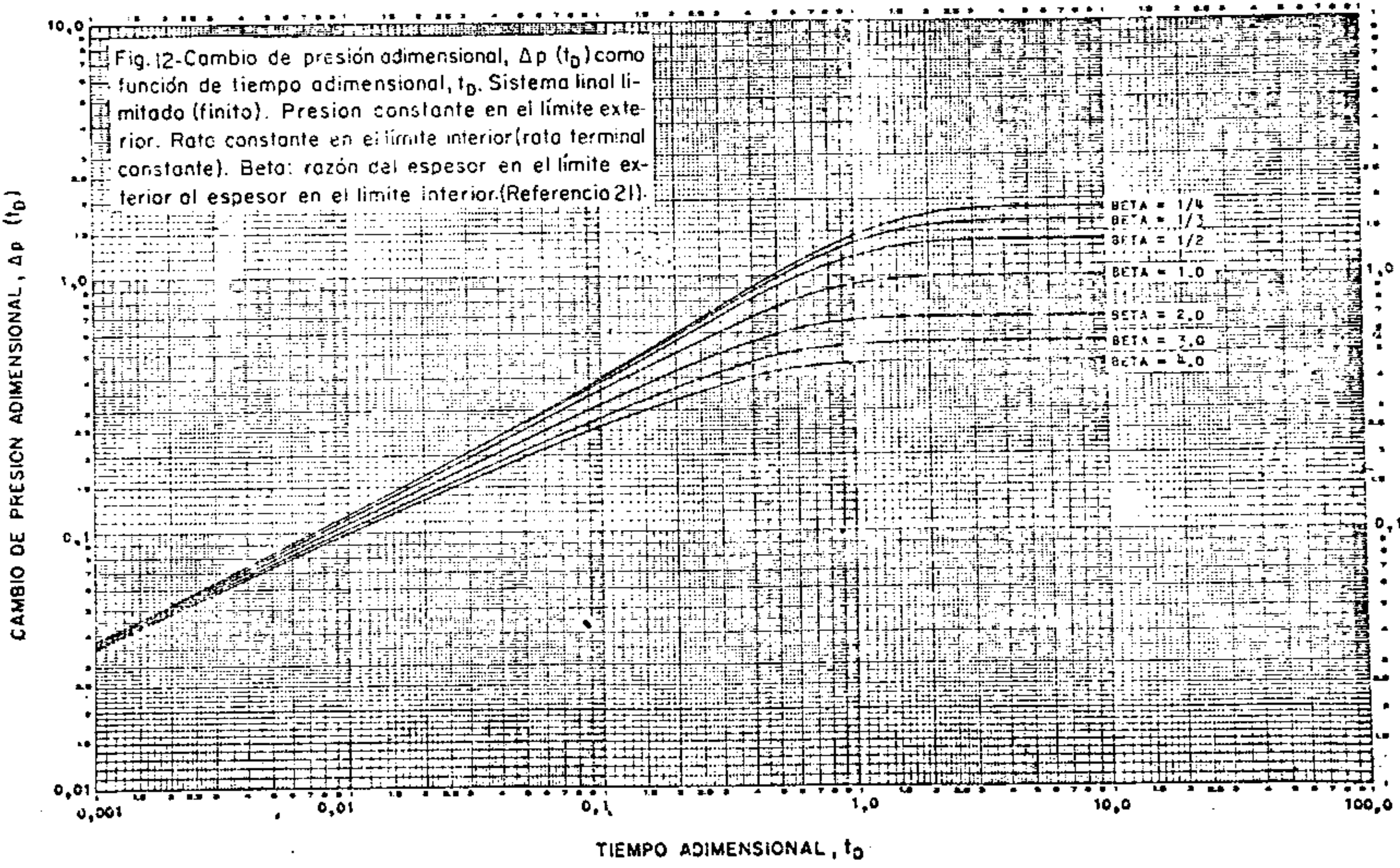


Fig. 12-Cambio de presión adimensional, $\Delta p\ (t_D)$ como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema linal limitado (finito). Presion constante en el límite exterior. Rata constante en el límite interior (rata terminal constante). Beta: razón del espesor en el límite exterior al espesor en el límite interior. (Referencia 21).

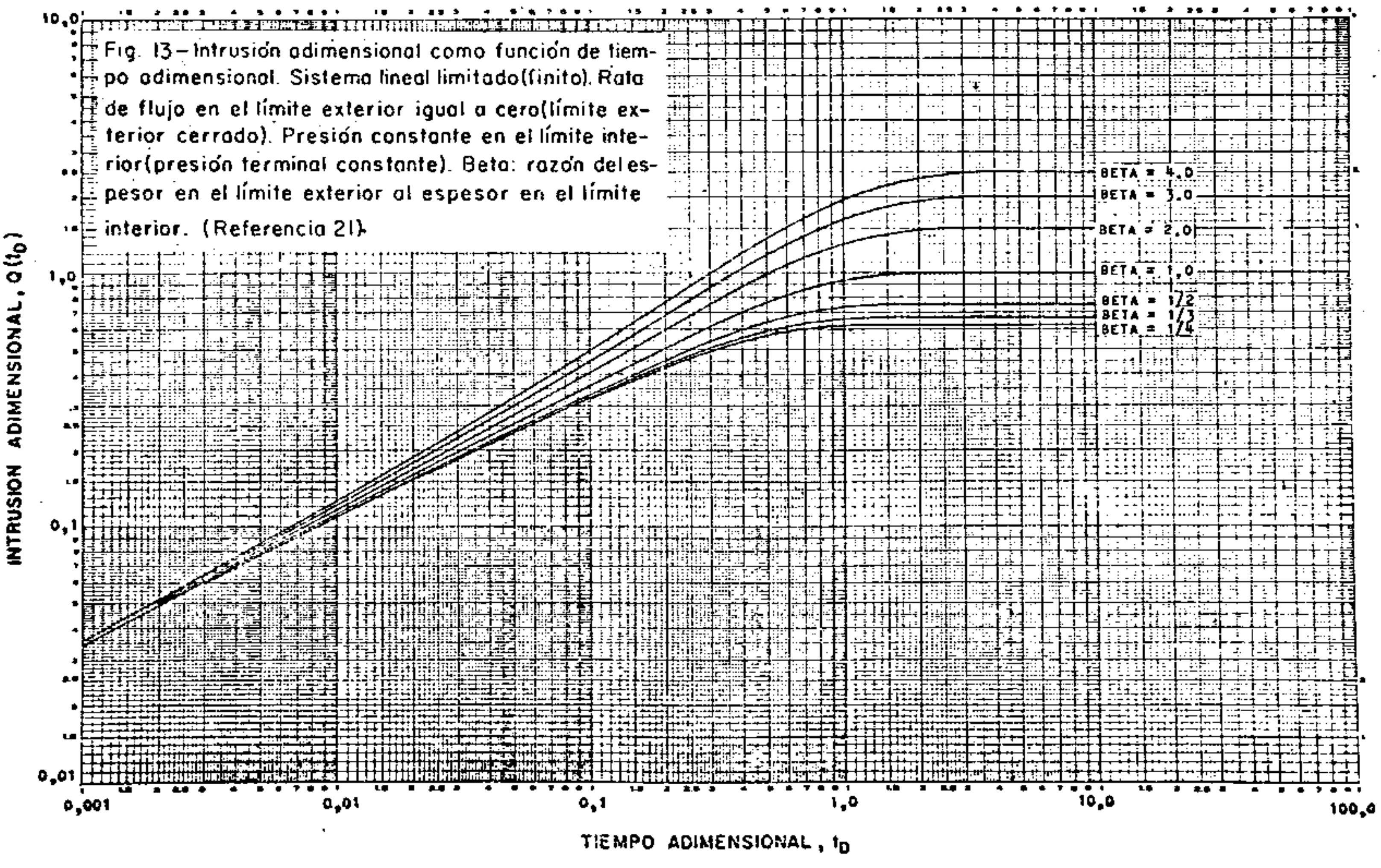


Fig. 13 – Intrusión adimensional como función de tiempo adimensional. Sistema lineal limitado (finito). Rata de flujo en el límite exterior igual a cero (límite exterior cerrado). Presión constante en el límite interior (presión terminal constante). Beta: razón del espesor en el límite exterior al espesor en el límite interior. (Referencia 21).

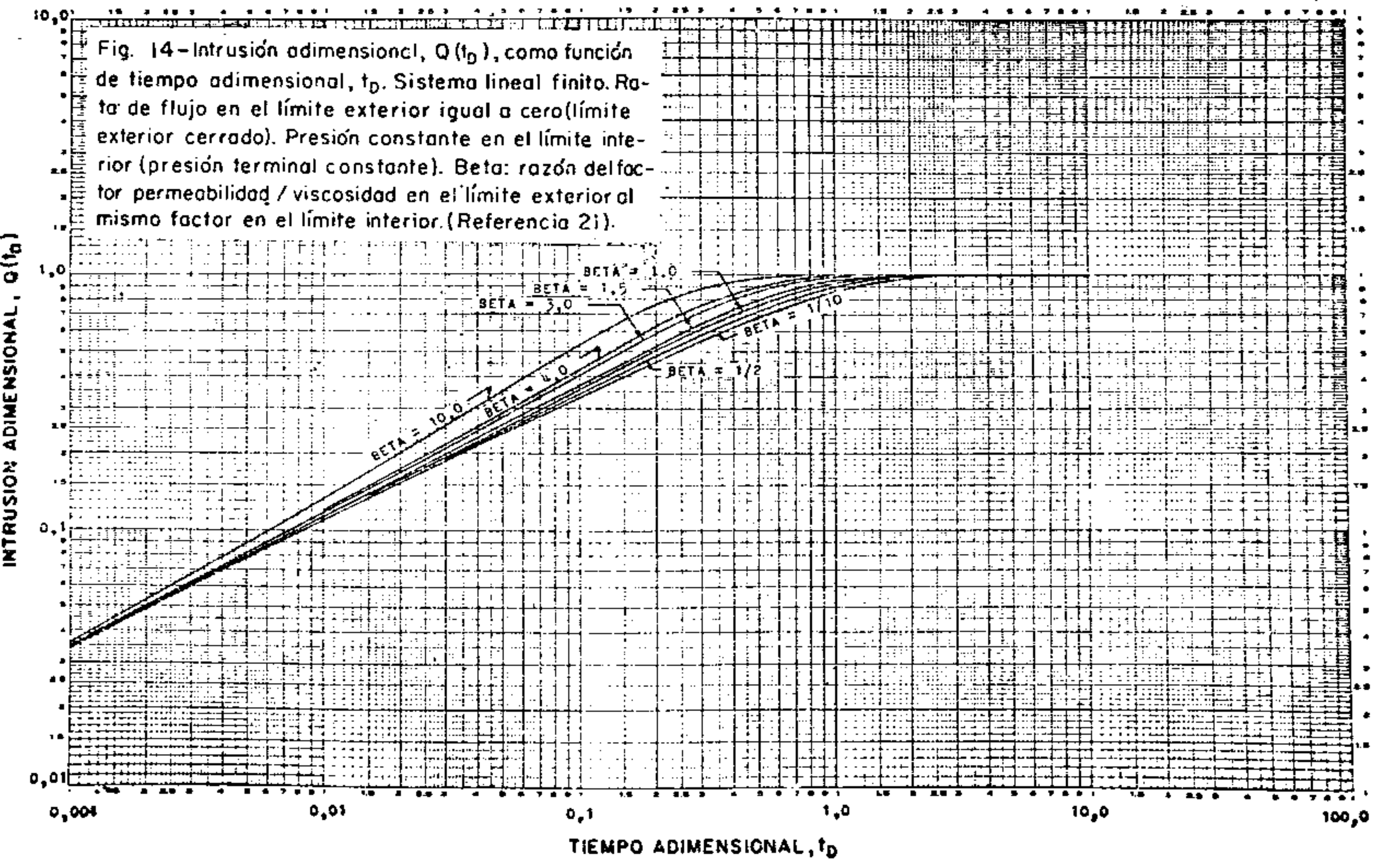


Fig. 14–Intrusión adimensional, $Q(t_D)$, como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema lineal finito. Rata de flujo en el límite exterior igual a cero (límite exterior cerrado). Presión constante en el límite interior (presión terminal constante). Beta: razón del factor permeabilidad / viscosidad en el límite exterior al mismo factor en el límite interior. (Referencia 21).

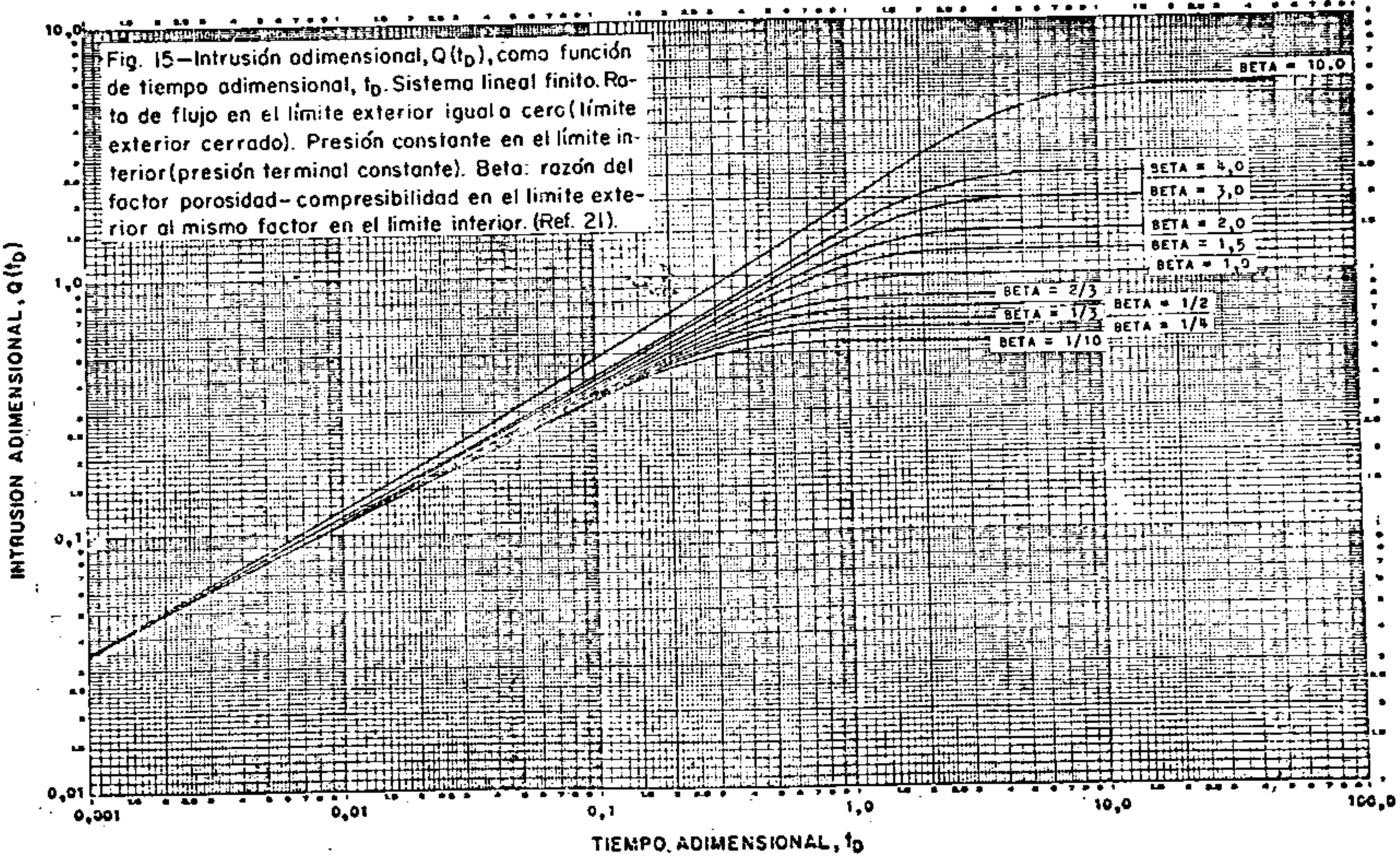


Fig. 15—Intrusión adimensional, $Q(t_D)$, como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema lineal finito. Rata de flujo en el límite exterior igual a cero (límite exterior cerrado). Presión constante en el límite interior (presión terminal constante). Beta: razón del factor porosidad-compresibilidad en el límite exterior al mismo factor en el límite interior. (Ref. 21).

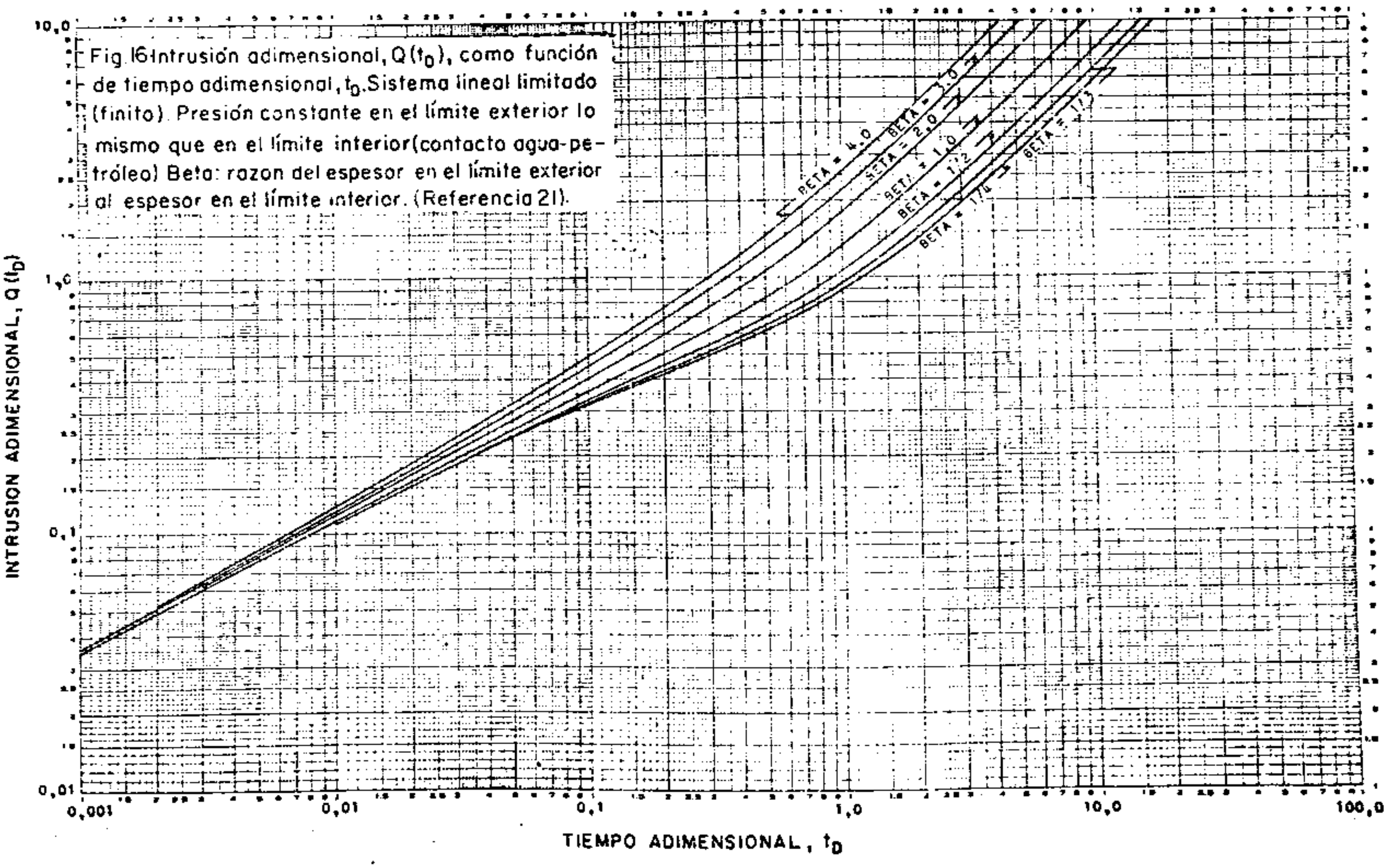


Fig. 16 Intrusión adimensional, $Q(t_D)$, como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema lineal limitado (finito). Presión constante en el límite exterior lo mismo que en el límite interior (contacto agua-petróleo) Beta: razon del espesor en el límite exterior al espesor en el límite interior. (Referencia 21).

variando el espesor de acuerdo al valor de β entre 0,25 y 4,0. Esta figura se usa para obtener el factor $F_1(t_D)$ de la Ec.(31a) (definido- también como $Q(t_D)$ en función de t_D).

Los resultados descritos, fueron obtenidos por medio de computadores digitales de alta velocidad usando una solución numérica (diferencias finitas) de la ecuación de difusividad para acuíferos lineales. Debe tenerse en cuenta que al variar k/μ, puede simplemente variarse individualmente la permeabilidad, la viscosidad o ambos a la vez. Igual sucede con el producto ϕc, es decir, puede variarse la porosidad o la compresibilidad individualemente o ambos a la vez. Así por ejemplo, obsérvese el comportamiento de la Fig.14, de la cual puede decirse que para todas las posibles combinaciones de permeabilidad en que varía β, a determinado tiempo adimensional, se obtiene el mismo valor de la intrusión adimensional. Esto puede justificarse si se tiene en cuenta que su cambio en permeabilidad no varía el volumen total de agua disponible para intrusión; únicamente desplaza el eje del tiempo cuandc el agua fluye del acuífero. También puede observarse que un sistema con β = 0,1, es decir, un sistema que disminuye 10 veces su permeabilidad hacia el límite exterior, la diferencia máxima de la intrusión adimensional respecto a la intrusión para un sistema homogéneo (β = 1,0), es de un 25 por ciento, valor relativamente pequeño si se compara con el cambio es permeabilidad. Para un β = 10, es decir, el inverso del caso anterior, o sea que la permeabilidad aumenta a partir del límite interior, el cambio de la intrusión adimensional máxima respecto a un acuífero homogéneo es del 33 por ciento.

Acuíferos Radiales Homogéneos.

Este tipo se refiere a acuíferos marginales, donde el agua en

tra al yacimiento lateralmente y su movimiento puede aporximarse a flujo radial. Las Figs.1 a 4 representan esquemáticamente el modelo de flujo más común en este tipo de acuíferos. La solución más conocida para este tipo de acuíferos es el modelo resuelto analíticamente por van Everdingen y Hurst[7]. El modelo se cumple tanto para petróleo que fluya radialmente a un pozo, como para agua que fluye también radialmente a un yacimiento según lo indica la Fig.17, partes a y b. El espesor del acuífero, h, es pequeño comparado con el radio del yacimiento R_i. En ambos casos, se considera flujo horizontal radial y demás suposiciones de la Ec.(25),

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\phi \mu c}{k}\frac{\partial p}{\partial t} \tag{25}$$

Generalmente, con el fin de resolver esta ecuación más fácilmente, se transforma en otra ecuación en función de radio y tiempo adimensionales, r_D y t_D, definidos en la Fig.17 y además un término de presión adimensional,

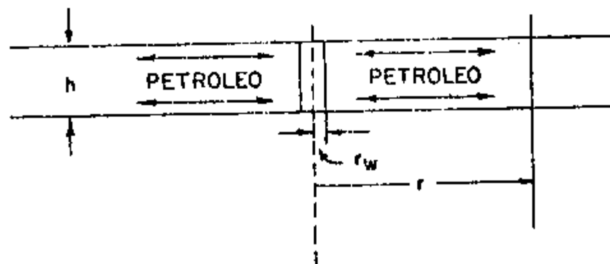
$$P = \Delta p(r_D, t_D) = \frac{(pi-p)}{\frac{q\mu}{2\pi kh}} = \frac{(pi-p)}{\frac{e\mu}{2\pi kh}} \tag{35}$$

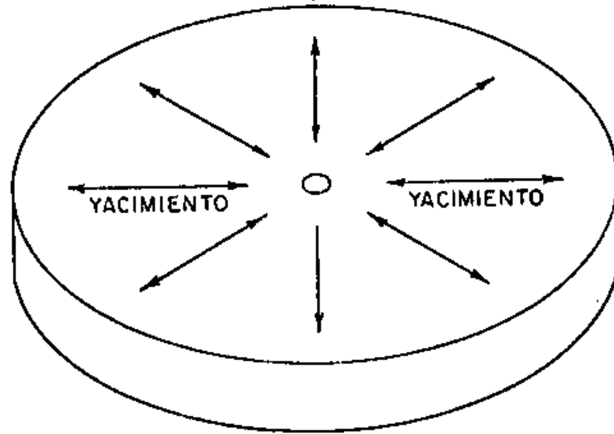
donde q y e son las ratas de producción al pozo y rata de intrusión al yacimiento.

Introduciendo los términos r_D, t_D y P en la Ec.(35) resulta la siguiente ecuación adimensional para un sistema acuífero (o yacimiento) homogéneo,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D}\frac{\partial P}{\partial r_D} = \frac{\partial P}{\partial t_D} \tag{36}$$

En forma similar el caso de acuíferos lineales discutidos ante



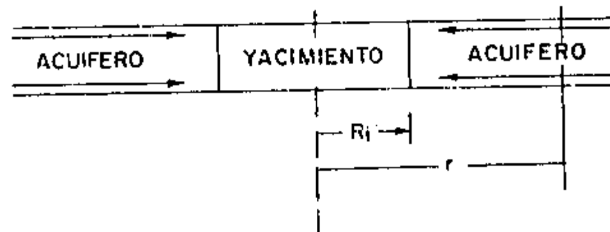


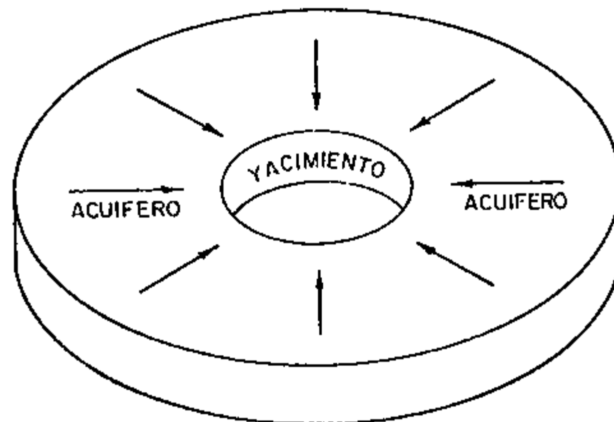
a)

PARAMETROS ADIMENSIONALES:

$$r_D = \frac{r}{r_w}$$

$$t_D = \frac{0{,}006323\ K_o\ t}{\phi\ C_o\ \mu_o\ r_w^2}$$





b)

PARAMETROS ADIMENSIONALES:

$$r_D = \frac{r}{R_i}$$

$$t_D = \frac{0{,}006323\ K_w t}{\phi\ C_w\ \mu_w\ R_i^2}$$

Fig. 17 – Modelo radial para los cuales se ha resuelto la ecuación de difusividad: (a) yacimiento que fluye a un pozo, (b) acuífero que fluye a un yacimiento.

riormente, existen soluciones de esta ecuación de acuerdo al tamaño del acuífero (o yacimiento) y de acuerdo a las condiciones iniciales y de límite. La Fig.18 ilustra las condiones de límite para los diferentes casos resueltos: dos para acuíferos (o yacimiento) infinitos y cuatro para finitos. Las condiones iniciales y de límite para estos casos son:

Condiciones Iniciales. Tal como en acuíferos lineales, la condición inicial, tanto para acuíferos (o yacimientos) infinitos como finitos (limitados), considera una presión inicial constante, pi, al tiempo t=0 para todo valor de r. Analíticamente,

Unidades Dimensionales	Unidades Adimensionales
$p(r,0) = pi$	$\Delta P(r_D,0) = P(r_D,0) = 0$

Condiciones de Límite (Contorno)- Las condiciones de límite o contorno se refiere a las condiciones impuestas al modelo en el límite interior (pozos, o contacto agua-petróleo) como en el límite exterior radio r_e si el modelo es finito o $r_e \to \infty$ para el caso de modelos infinitos .

Los diferentes casos incluidos en la Fig.18 han sido ampliamente estudiados [7,8,19,2,22,23,24,25,26,27]. Entre estas referencias, una de las más conocidas para la solución de todos los casos, excepto el Caso 6, es el estudio de van Everdingen y Hurst[7], vEH, resumida y ampliada luego Chatas[8]. Además, una sola solución general del Caso 1 ha sido obtenido principalmente por Mortada[26], Theis[23] y otros [25, 26] y el Caso 6 ha sido resuelto por Mueller[21]. A continuación se presentan las condiciones de límite y las respectivas soluciones para los

casos incluidos en la Fig. 18.

I Acuíferos Infinitos - En este tipo de sistema, existen dos casos: Rata Terminal Constante Presión Terminal Constante. Se han denominado Caso 1 y Caso 2 respectivamente en este estudio.

Caso 1 - Rata de intrusión constante en el contacto agua-petróleo (acuífero-yacimiento) o límite interior. En el límite exterior, la presión tiende a pi cuando el radio tiende a infinito. Analíticamente, las condiciones de límite son:

Unidades Dimensionales | Unidades Adimensionales

a) e = constante para t > 0

$$e = \frac{2\pi kh}{\mu}\left[r\ \frac{\partial p}{\partial r}\right]_{Ri} \text{ para } t > 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}(Ri,t) = \frac{e\mu}{2\pi khR_i} \qquad\qquad \frac{\partial P}{\partial r_D}(1,t) = -1$$

b) $p \rightarrow pi$ cuando $r \rightarrow \infty$ para $t > 0$

$p(r,t) \rightarrow pi$, cuando $r \rightarrow \infty$ $\qquad$ $p(r_D,t_D) \rightarrow \infty$ cuando $r_D \rightarrow \infty$

Existen varias soluciones para este caso. Las más comunes son: (A) solución exacta de van Everdingen y Hurst[7], que permite calcular la presión en el contacto agua-petróleo (o en el pozo), o sea a un radio R_i o r_w (o en unidades adimensionales a un radio $r_D = 1$) y a cualquier tiempo t; (B) solución del Integral Exponencial, Ei, o de Theis[23], que permite calcular la presión a cualquier radio r o r_D y a cualquier tiempo t, y (C) solución de Mortada[26], que también permite calcular la presión a cualquier radio r o r_D y a cualquier

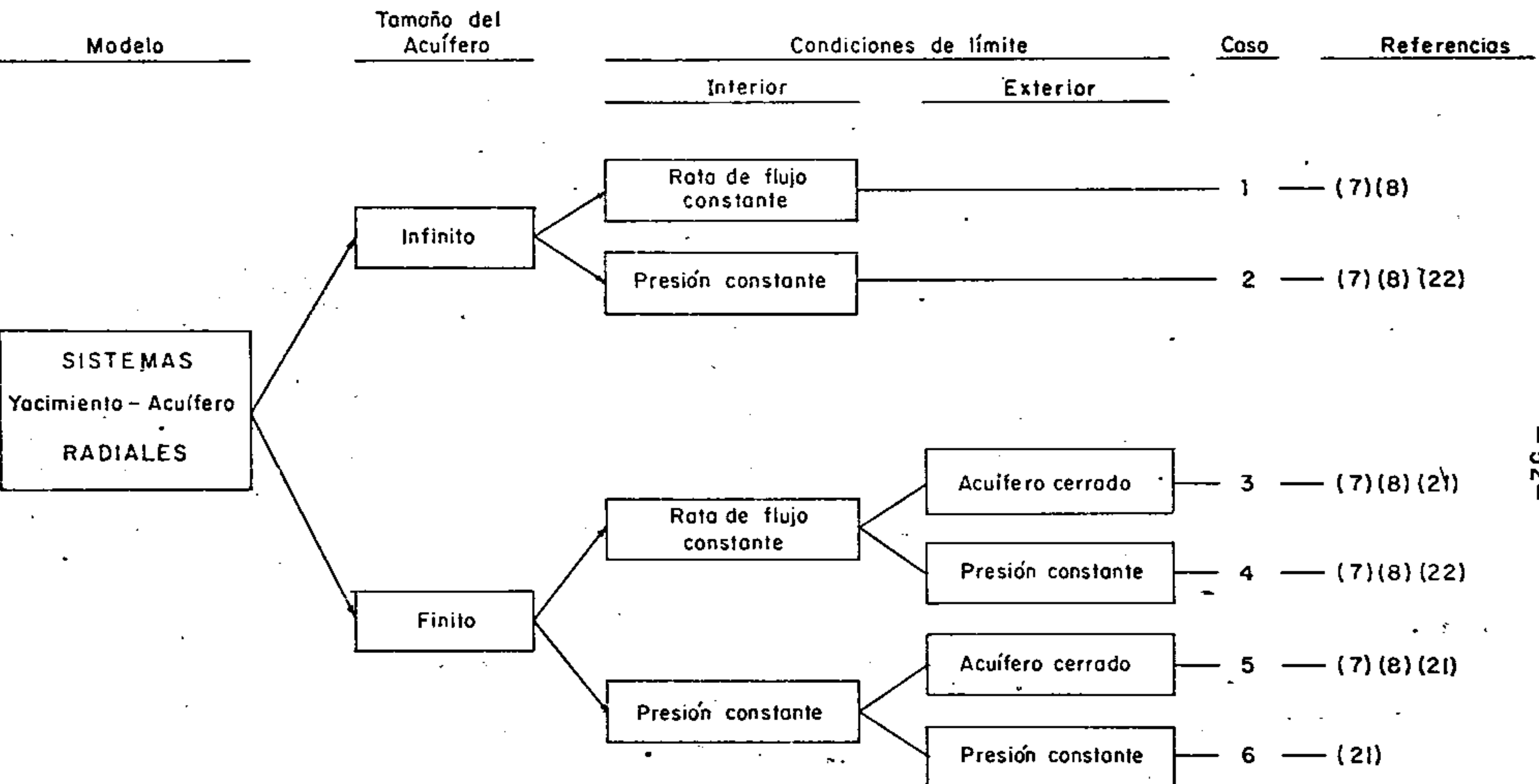


Fig. 18–Soluciones de la ecuación de difusividad para sistemas (yacimiento– acuífero) radiales.

tiempo t. A continuación se presentan estas soluciones en unidades prácticas:

A) Solución Exacta de Van Everdingen y Hurst[7], vEH.

$$p(R_i,t) = pi - \frac{141,2\ e\mu}{kh}\Delta p(t_D) \tag{37}$$

donde,

$$\Delta p(t_D) = \Delta p(1,t_D) = \frac{4}{\pi^2}\int_o^\infty \frac{(1 - e^{-\mu^2 t_D})du}{u^3[J_1^2(u) + Y_1^2(u)]} \tag{38}$$

Para la obtención de $\Delta p(t_D)$ pueden usarse las siguientes ecuaciones simplificadas de acuerdo al valor de t_D:

Si $t_D < 0,01$:

$$\Delta p(t_D) = 2\sqrt{\frac{t_D}{\pi}} = 1,1284\sqrt{t_D} \tag{39}$$

Si $t_D > 100$:

$$\left.\begin{aligned}\Delta p(t_D) &= \frac{1}{2}\,(\ln(t_D) + 0,80907)\\ &= 0,5\ \ln(t_D) + 0,40454\\ &\doteq 1,15129\ \log\,(t_D) + 0,40454\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Si $t_D > 0,01$: usar la Ec.(38). Afortunadamente esta ecuación ha sido calculada como función de t_D. La Tabla II presenta valores de $\Delta p(t_D)$ para t_D entre 0 y 5000 y la Fig.19 presenta los mismos valores para t_D entre 0,01 y 10000.

Edwardson y otros[27], presentan las siguientes ecuaciones

TABLA II - Valores del Cambio (caída) de Presión Adimensional, $\Delta p(t_D)$, para el caso 1A: Acuífero (Yacimiento) Infinito, Rata Terminal Constante, Ec.(38). (Referencias 7 y 8). Fig. 19.

t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$
0	0	20	1,9594
0,005	0,0250	25	2,0621
0,001	0,035191	30	2,1469
0,002	0,049487	35	2,2192
0,003	0,060349	40	2,2822
0,004	0,069433	45	2,3381
0,005	0,077384	50	2,3883
0,006	0,084528	55	2,4339
0,007	0,091063	60	2,4757
0,008	0,097115	65	2,5142
0,009	0,10277	70	2,5499
0,01	0,10810	75	2,5833
0,015	0,1312	80	2,6145
0,020	0,15031	85	2,6439
0,025	0,1669	90	2,6717
0,03	0,18176	95	2,6979
0,04	0,20767	100	2,7229
0,05	0,23007	150	2,9212
0,06	0,24997	200	3,0626
0,07	0,26800	250	3,1726
0,08	0,28455	300	3,2629
0,09	0,29989	350	3,3389
0,1	0,31423	400	3,4051
0,15	0,3750	450	3,4635
0,2	0.42425	500	3,5158
0,3	0,50242	550	3,5632
0,4	0,56462	600	3,6065
0,5	0,61686	650	3,6463
0,6	0,66220	700	3,6833
0,7	0,70242	750	3,7176
0,8	0,73867	800	3,7497
0,9	0,77172	850	3,7799
1,0	0,80215	900	3,8083
2,0	1,0222	950	3,8352
3,0	1,1663	1000	3,8608
4,0	1,2749	1500	4,0627
5,0	1,3625	2000	4,2062
6,0	1,4360	2500	4,3175
7,0	1,4996	3000	4,4086
8,0	1,5556	3500	4,4855
9,0	1,6056	4000	4,5522
10,0	1,6509	4500	4,6110
15,0	1,8293	5000	4,6637

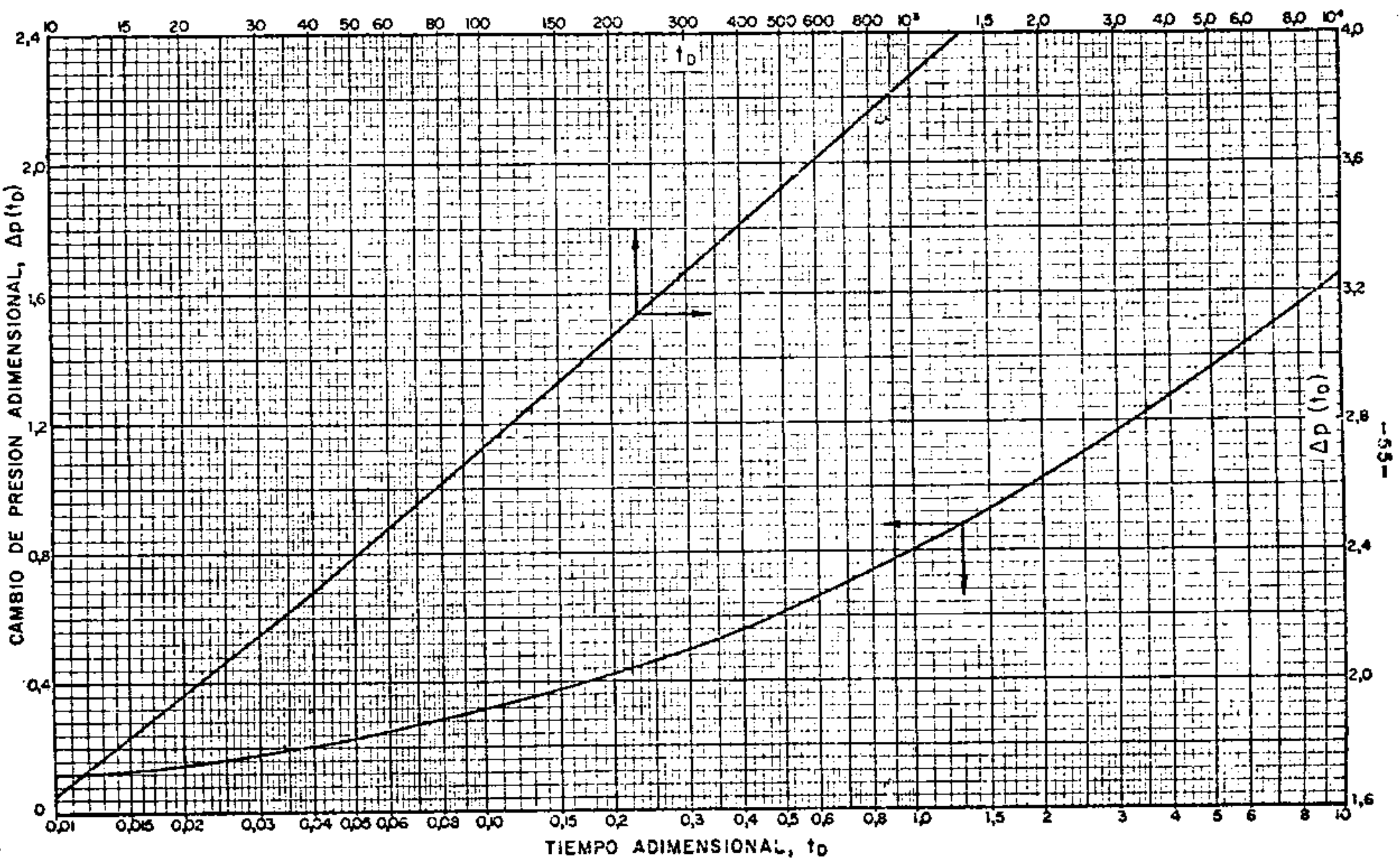


Fig. 19-Cambio de presión adimensional como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial infinito. Rata de producción (intrusión) constante. (Referencias 7 y 8).

para el cálculo de $\Delta p(t_D)$ como función de t_D:

Si $0,01 < t_D < 500$:

$$\Delta p(t_D) = \frac{370,529\sqrt{t_D} + 137,582t_D + 5,69549t_D\sqrt{t_D}}{328,834 + 265,488\sqrt{t_D} + 45,2157t_D + t_D\sqrt{t_D}} \quad (4$$

Máximo error respecto al valor exacto: 0,08 por ciento

Si $t_D > 500$:

$$\Delta p(t_D) = \left[\frac{1}{2}\ln(t_D) + 0,40454\right]\left[1 + \frac{1}{2t_D}\right] + \frac{1}{4t_D} \quad (42$$

Máximo error respecto al valor exacto: 0,01 por ciento.

Nótese que el primer término entre paréntesis de esta ecuación es igual a la Ec.(40). Las Ecs.(41) y (42) pueden ser de gran utilidad cuando se trata de trabajos en computadores.

B) Solución del Integral Exponencial, Ei. También se denomina solución de la linea fuente o solución de Theis[23]. Aunque esta solución en la tecnología petrolera es más comunmente conocida como solución del integral exponencial o solución de Ei, parece que Theis fué el primero en demostrar como usar esta solución a analísis de flujo no-continuo. Particularmente en hidrología se conoce comunmente como solución de Theis. Esta solución permite calcular la presión a cualquier radio r o r_D para cualquier tiempo. Al mismo tiempo puede emplearse para el caso de $r_D = 1$ ($r = R_i$ o r_w).

La solución del Integral Exponencial introduce la siguiente definición de tiempo adimensional t_{Dr}.

$$t_{Dr} = \frac{0{,}006323\ kt}{\phi \mu c r^2} = \frac{t_D}{{r_D}^2} \qquad (43)$$

y la solución está dada por,

$$p(r,t) = pi - \frac{141{,}2(e)_{Ri}\ \mu}{kh} \Delta p(r_D,t_D) \qquad (44)$$

donde,

$$\Delta p(r_D,t_D) = \frac{1}{2}\left[-Ei(-\frac{1}{4t_{Dr}})\right] = \frac{1}{2}\left[-Ei(-\frac{{r_D}^2}{4t_D})\right] \qquad (45)$$

A su vez, el valor del integral exponencial está definido por,

$$-Ei(-x) = \int_{o}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \qquad (46)$$

o también, en forma de una serie,

$$Ei(-x) = \ln(x) + 0{,}5772 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n)(n!)} \qquad (47)$$

Los valores de Ei se encuentran tabulados y graficados en el Apéndice A, para diferentes valores del argumento x.

Si,

$$x = \frac{1}{4t_{Dr}} = \frac{{r_D}^2}{4t_D} < 0{,}01:$$

usar la Ec.(40) para el calculo de $\Delta p(r_D,t_D)$.

C) <u>Solución de Mortada[26].</u> Permite calcular la presión a cualquier radio r o r_D para cualquier tiempo, usando una ecuación de la forma de la Ec.(44), donde el $\Delta p(r_D,t_D)$ se obtiene en forma diferente. van Everdingen y Hurst presentan una ecuación de $\Delta p(r_D,t_D)$ del siguiente

tipo,

$$\Delta p(r_D,t_D) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(1-e^{-u^2 t_D}) - \left[J_1(u)Y_o(ur_D) - Y_1(u)J_o(ur_D)\right]du}{u^2\left[J_1^2(u) + Y_1^2(u)\right]} \quad (48$$

Sin embargo, no presentan una solución numérica de esta ecuación y sólo la usan como paso intermedio para la solución dada en el Caso A, es decir, para $r_D = 1$, la Ec.(48) se convierte en la Ec.(38).

Mortada[26], usando en parte consideraciones matemáticas y en parte computadores digitales y analógicos, presenta la solución de este caso. Las Figs.20, 21, y 22, incluyen valores de $\Delta p(r_D,t_D)$ como función de t_D y para valores de r_D = 1, 2, 4, 8, 16, 32, y 64. Edwardson y otros[27], dan también valores de $\Delta p(r_D,t_D)$ como función de t_D para valores de r_D = 2, 3, 5, 8, 10, 15, 20, y 30. Tales resultados se incluyen en la Tabla III. Finalmente, la Fig.23 presenta valores de $\Delta p(r_D, t_D)$ como función de $t_{Dr} = t_D/r_D^2$, para r_D = 1 ; 1,1 ; 1,2 ; 1,3 ; 1,4 1,5 ; 1,6 ; 1,7; 2,0 ; 3,0 ; 5,0 ; 10,0 ; 20,0.

En base a los resultados anteriores se presenta la Fig.24, q relaciona r_D como función de $\Delta p(r_D,t_D)$ para valores de t_D entre 1 y 4000. Incluye también en esta figura, para comparación, los valores d cambio de presión adimensional, usando la solución Ei, Ec.(50).

Mortada sugiere las siguientes ecuaciones para el cálculo de $\Delta p(r_D,t_D)$,

Si $t_D \leq 0,01$,

$$\Delta p(r_D,t_D) = \frac{2\sqrt{t_D}}{r_D}\ \mathrm{ierfc}\left(\frac{r_D - 1}{2\sqrt{t_D}}\right)^* \quad (49)$$

---

* Ver parte inferior de la página siguiente.

TABLA III - Valores del Cambio (caída) de Presión Adimensional, $\Delta p(r_D,t_D)$, como Función de Tiempo Adimensional para Diferentes Valores de r_D. Caso 1C: Acuífero (o Yacimiento) Infinito, Rata Terminal Constante.(Referencia 27).

t_D	r_D 2	r_D = 3	r_D = 5	r_D = 8	r_D = 10	r_D = 15	r_D = 20	r_D = 30
4000	3,8591	3,4538	2,9434	2,4746	2,2526	1,8510	1,5687	1,1785
3000	3,7155	3,3102	2,8000	2,3315	2,1099	1,7095	1,4290	1,0438
2000	3,5131	3,1079	2,5960	2,1304	1,9095	1,5117	1,2347	0,8591
1500	3,3697	2,9645	2,4550	1,9881	1,7679	1,3726	1,0991	0,7330
1000	3,1677	2,7627	2,2537	1,7885	1,5697	1,1794	0,9126	0,5647
750	3,0245	2,6197	2,1114	1,6477	1,4303	1,0449	0,7848	0,4539
500	2,8231	2,4187	1,9115	1,4509	1,2364	0,8606	0,6132	0,3140
400	2,7125	2,3083	1,8021	1,3437	1,1314	0,7626	0,5242	0,2466
300	2,5702	2,1664	1,6617	1,2072	0,9982	0,6408	0,4168	0,1716
200	2,3703	1,9674	1,4658	1,0187	0,8164	0,4806	0,2826	0,09061
150	2,2293	1,8272	1,3285	0,8887	0,6929	0,3771	0,2021	0,05111
100	2,0317	1,6313	1,1365	0,7127	0,5291	0,2492	0,1124	0,01806
75	1,8927	1,4940	1,0068	0,5946	0,4224	0,1748	0,06692	0,00691
50	1,6991	1,3035	0,8274	0,4405	0,2888	0,09092	0,02602	0,00115
40	1,5939	1,2007	0,7326	0,3634	0,2252	0,06120	0,01356	0,00032
30	1,4600	1,0706	0,6154	0,2736	0,1552	0,03183	0,00486	0,00004
20	1,2755	0,8940	0,4624	0,1682	0,08081	0,00966	0,00071	
15	1,1482	0,7732	0,3643	0,1100	0,04515	0,00320	0,00012	
10	0,9751	0,6133	0,2441	0,05206	0,01579	0,00041		
7,5	0,8576	0,5080	0,1734	0,02660	0,00603	0,00006		
5,0	0,7011	0,3737	0,09613	0,00787	0,00101			
4,0	0,6200	0,3077	0,06490	0,00337	0,00029			
3,0	0,5217	0,2319	0,03568	0,00088	0,00004			
2,0	0,3960	0,1442	0,01223	0,00007				
1,5	0,3169	0,1003	0,00461	0,00001				
1,0	0,2204	0,04772	0,00077					
0,75	0,1634	0,02581	0,00014					
0,50	0,09938	0,00865	0,00001					
0,40	0,07212	0,00410						
0,30	0,04485	0,00127						
0,20	0,01973	0,00015						
0,15	0,00957	0,00002						
0,10	0,00263							

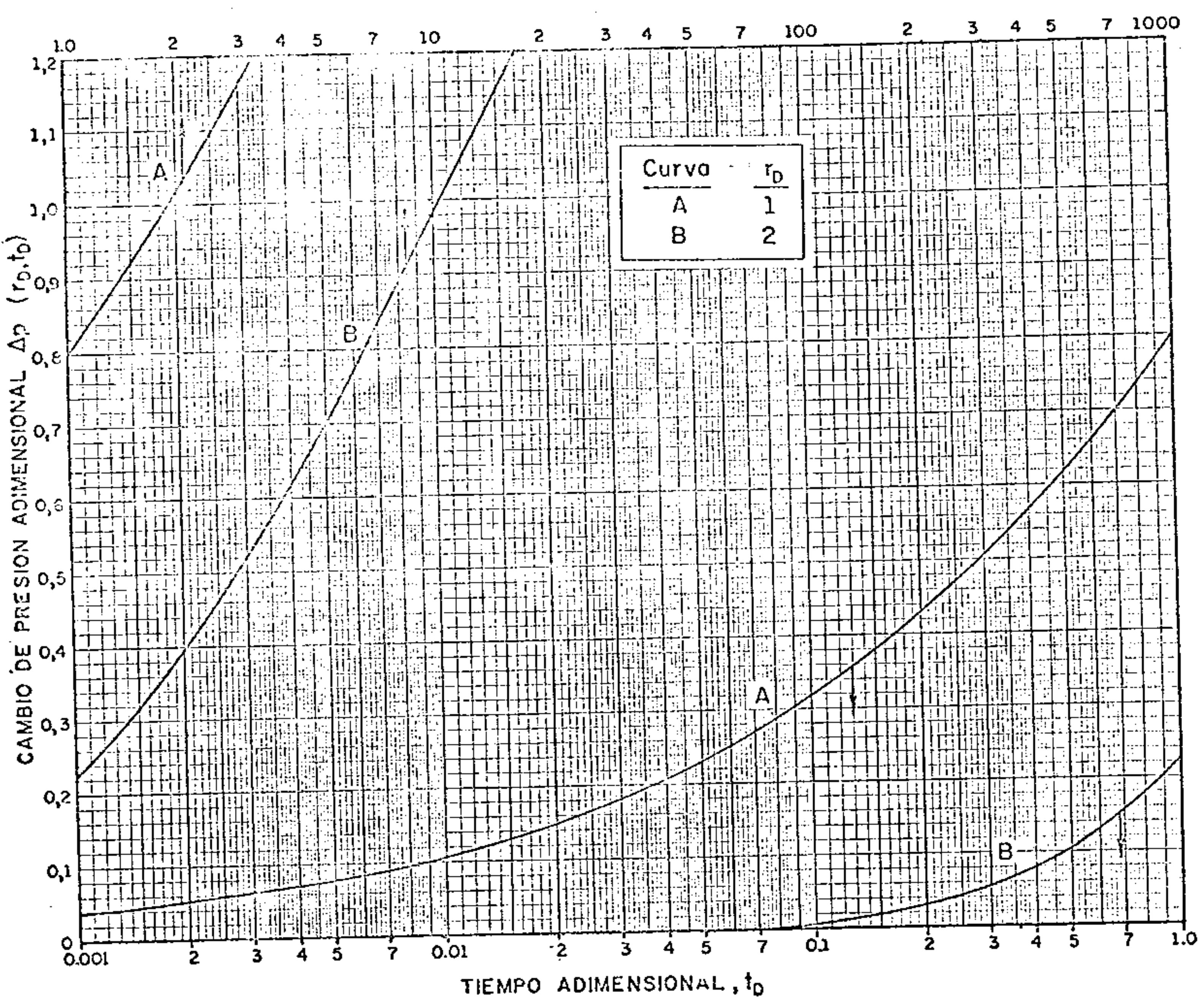


Fig. 20-Cambio de presión adimensional, Δp (r_D, t_D) como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial infinito. Rata terminal (de intrusion) constante. r_D = radio a partir del centro del yacimiento/radio del yacimiento. $r_D = 1, 2$; $t_D = 10^{-3}$ a 10^{3}. (Referencia 26).

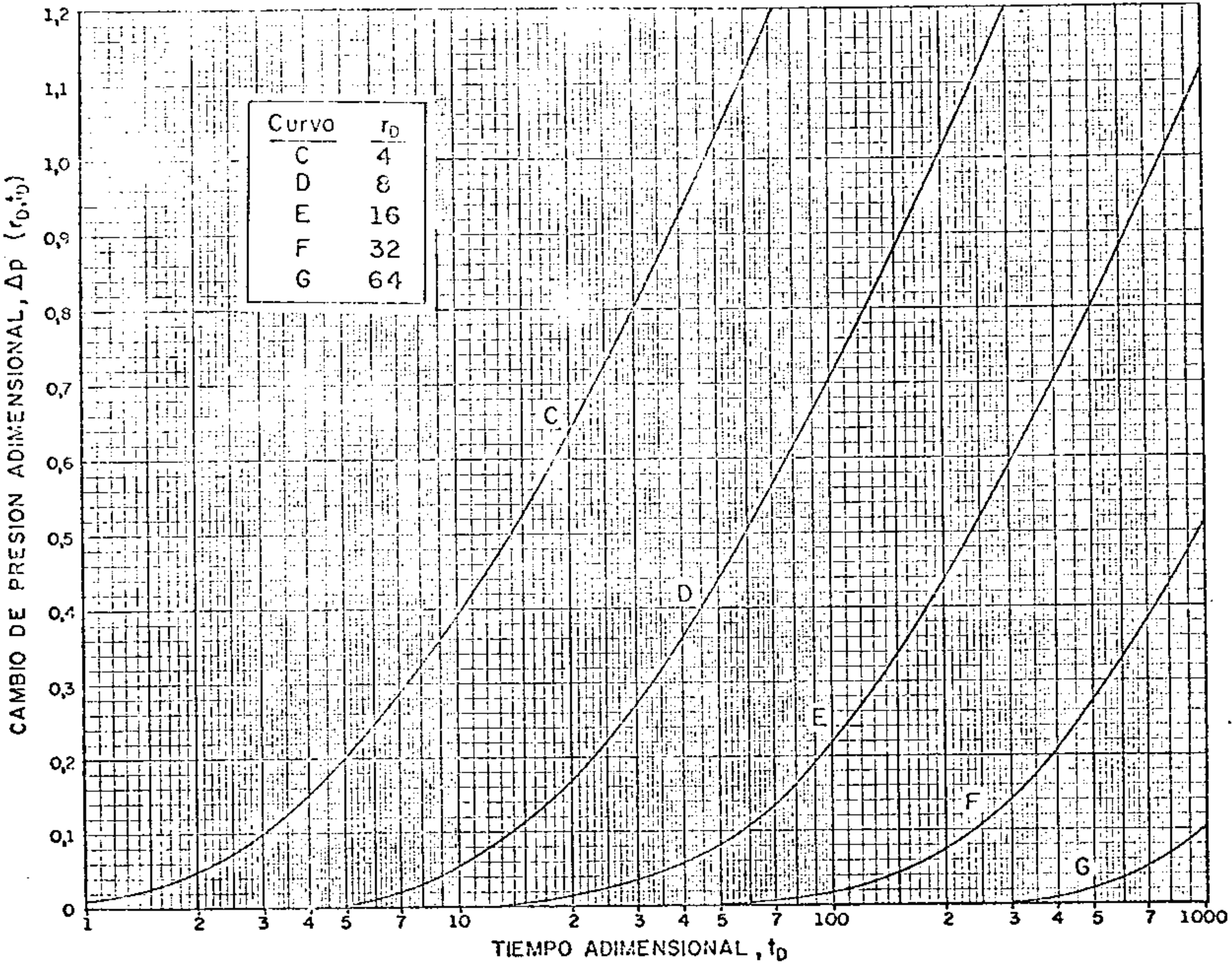


Fig. 21 – Cambio de presión adimensional, $\Delta p\ (r_D, t_D)$ como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial infinito. Rata terminal (de intrusión) constante. r_D = radio a partir del centro del yacimiento/ radio del yacimiento. $r_D = 4$ a 64; $t_D = 1$ a 10^3. (Referencia 26).

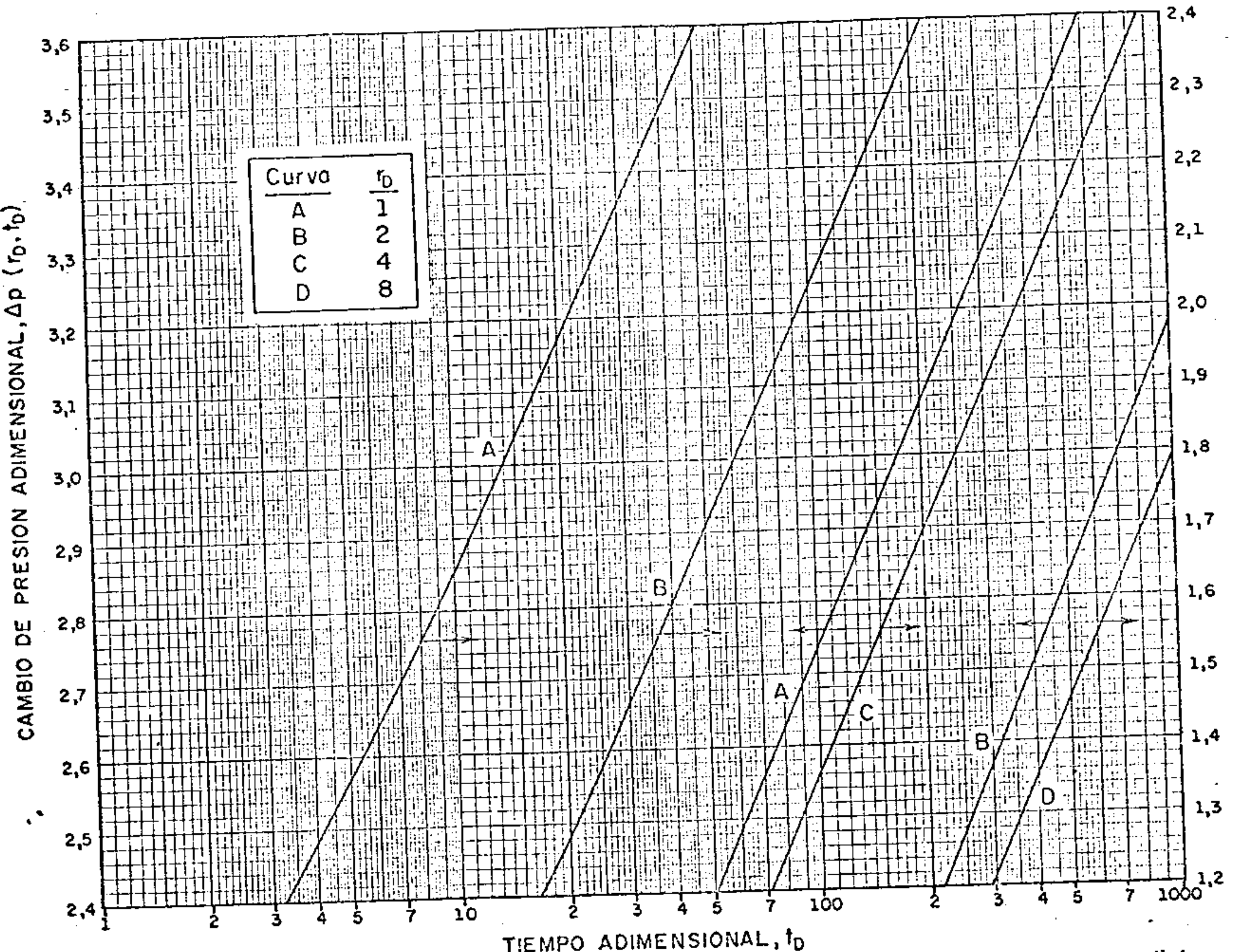


Fig. 22 - Cambio de presión adimensional, Δp (r_D,t_D) como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial infinito. Rata terminal (de intrusión) constante. r_D=radio a partir del centro del yacimiento radio/del yacimiento. r_D = 1 a 8; t_D=1 a 10^3. (Referencia 26).

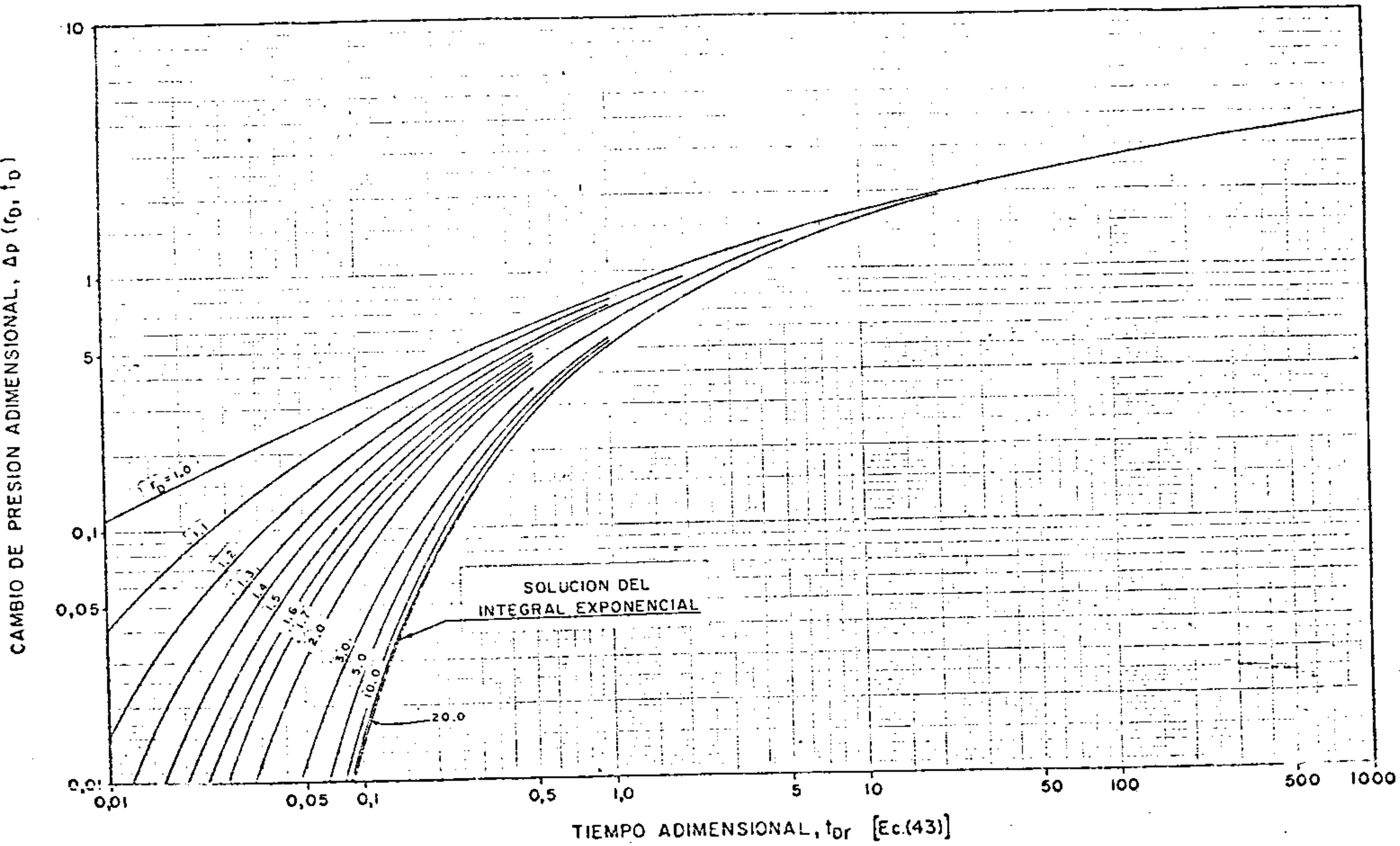


Fig. 23.— Solución de la ecuación de difusividad para flujo radial por el método de van Everdingen y Hurst ($r_D = 1$), Mortada y método del integral exponencial (Referencia 25)

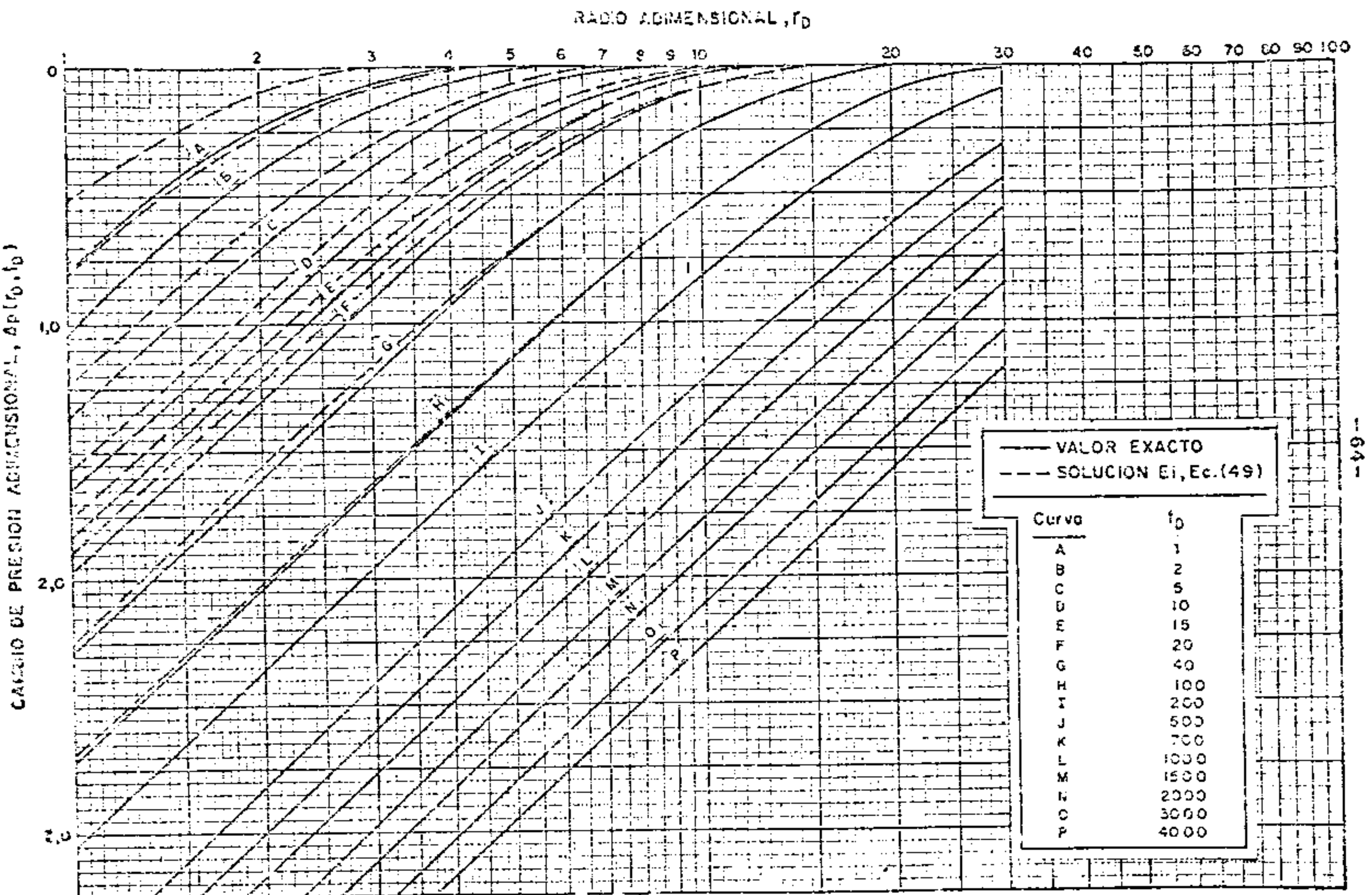


Fig. 24.— Cambio de presión adimensional, $\Delta p(r_D, t_D)$, como funcion de radio adimensional, r_D y tiempo adimensional t_D.

Si $t_D \geq 500$:

$$\Delta p(r_D,t_D) = \frac{1}{2}\left[- Ei(- \frac{r_D^2}{4t_D})\right] \qquad (50)$$

Comparación de las Soluciones del Caso 1.- Mueller y Witherspoon[25] presentan una comparación del valor del cambio de presión adimensional, $\Delta p(r_D,t_D)$, usando la solución de van Everdingen y Hurst (r_D=1), la solución de Mortada y la solución del integral exponencial. Los resultados aparecen en la Fig.23. Como puede observarse, esta figura presenta $\Delta p(r_D,t_D)$ como función de t_{Dr}, definido por la Ec.(43), es decir, t_D/r_D^2. La solución de Mortada para r_D=1,0 es igual a la solución de van Everdingen y Hurst. Las curvas entre r_D=1,0 y r_D=20,0 fueron obtenidas de la solución de Mortada, haciendo la transformación del tiempo adimensional t_D al tiempo adimensional t_{Dr},Ec.(43). Para los radios no incluidos en el trabajo de Mortada, se obtuvo la solución por computadores, en forma similar a la técnica usada por Mueller en otro estudio[21]. La curva inferior, en parte indicada con líneas interrumpidas, representa la solución del integral exponencial, obtenida asignando valores a t_{Dr} y calculando $\Delta p(r_D,t_D)$ de acuerdo a la Ec.(15). Es interesante observar la diferencia en los valores de $\Delta p(r_D,t_D)$ de acuerdo a si se usa la solución de van Everdingen y Hurst, Mortada o el Integral

---

$$* \; ierfc(x) = \frac{e^{-x^2}}{\pi} - (x)erfc(x)$$

$$erfc(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u^2}du = 1 - erf(x)$$

$$erf(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x e^{-u^2}du$$

Exponencial. A medida que disminuye el valor de t_{Dr}, aumenta la diferencia en $\Delta p(r_D,t_D)$ para las soluciones de vEH y Mortada en comparación con la solución Ei. La Fig.25 ilustra el error en porcentaje, como función de t_D, de la diferencia de las soluciones de vEH ($r_D = 1$ y $t_{Dr} = t_D$) y del Ei, tanto con respecto a la solución de vEH como respecto a la solución Ei. Claramente puede observarse que a medida que disminuye t_D aumenta el error, de donde puede concluirse que la solución del integral exponencial presenta un mayor error respecto a la solución de vEH a medida que disminuye t_D. Tal error debe tenerse en cuenta, especialmente para valores de t_D por debajo de 10.

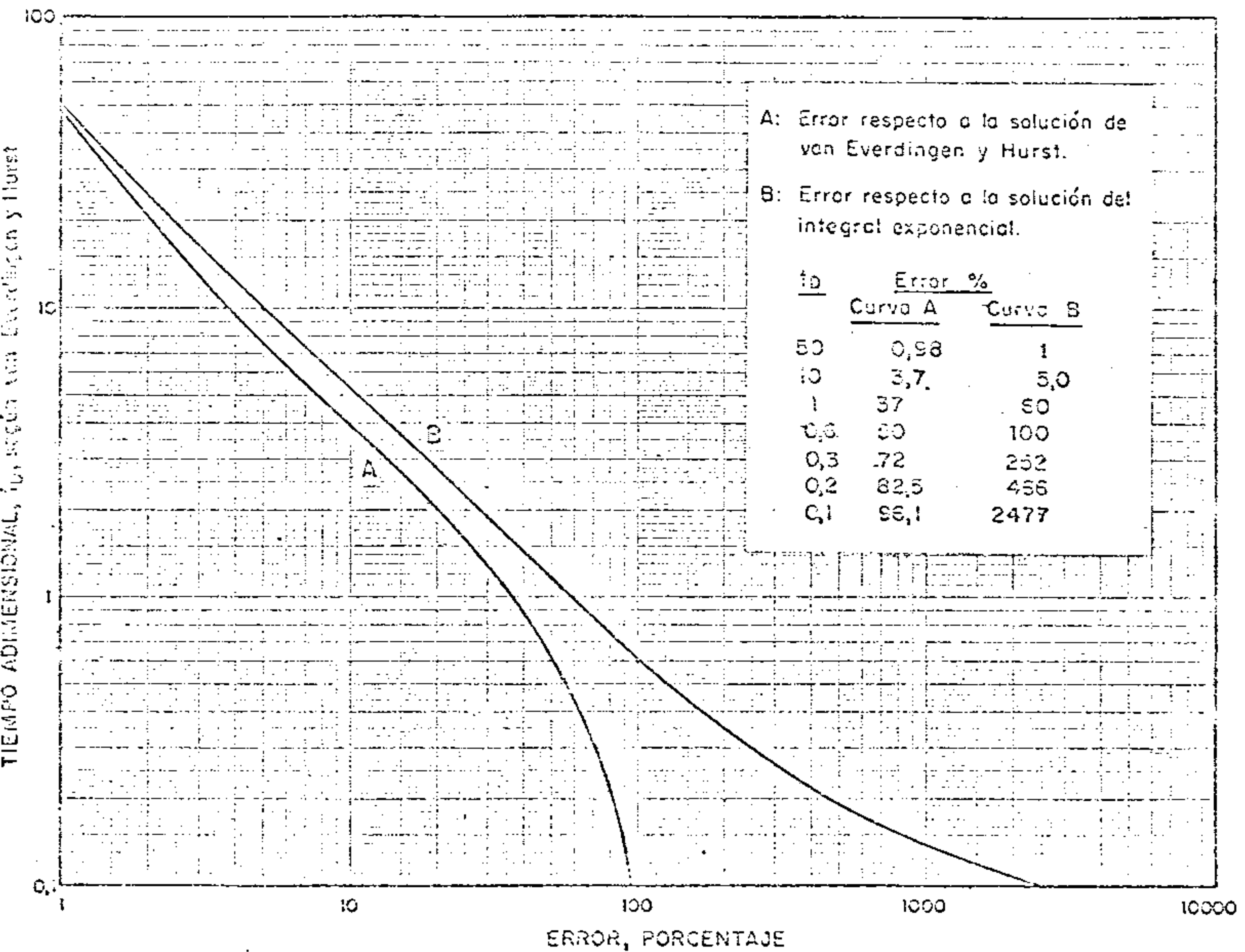
Es también interesante observar de la Fig.23, como a medida que aumenta el valor de r_D, la diferencia de $\Delta p(r_D,t_D)$ entre las distintas soluciones, con respecto a la solución Ei, es menor y puede concluirse que para $r_D \geq 20$ la solución Ei, puede usarse para el cálculo de $\Delta p(r_D,t_D)$ prácticamente sin ningun error.

Caso 2.- Presión constante en el contacto agua-petróleo (acuífero-yacimiento), o sea en el límite interior. Como en el Caso 1, en el límite exterior, la presión tiende a pi cuando el radio tiende a infinito. Analíticamente, las condiciones de límite son:

Unidades Dimensionales	Unidades Adimensionales
a) $(p)_{Ri}$ = constante, para $t > 0$	
$p(R_i,t)$ = constante	$p(1,t_D)$ = constante

En otra forma:

$(\Delta p)_{Ri} = (pi-p)_{Ri}$ = constante, para $t > 0$	
$\Delta p(R_i,t)$ = constante	$\Delta p(1,t_D)$ = constante



t_D	Error % Curva A	Error % Curva B
50	0,98	1
10	3,7.	5,0
1	37	50
0,6	60	100
0,3	72	252
0,2	82,5	456
0,1	96,1	2477

Fig.25.- Porcentaje de error como función de tiempo adimensional, t_D, entre las soluciones de la ecuación de difusividad de van Everdingen y Hurst y del integral exponencial.

b) Igual a la Condición b) del Caso 1

En este caso, van Everdingen y Hurst[7] presentan la solución para calcular la cantidad total de agua que pasa a través del contacto agua-petróleo (o que fluye al pozo), manteniendo una presión, p, constante en el contacto agua-petróleo (pozo) durante un t_D. La solución en cantidades prácticas es,

$$We(R_i,t) = We = 1,119\ \phi c\ h\ R_i^2\ \frac{\theta}{360^\circ}(\Delta p)_{Ri}\ Q(t_D) \qquad (51$$

donde,

$$Q(t_D) = Q(1,t_D) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{(1-e^{-u^2 t_D})du}{u^3\left[J_o^2(u) + Y_o^2(u)\right]} \qquad (52$$

Además, θ representa el angulo en grados, correspondientes al arco de circunferencia en que el acuífero es activo al yacimiento.

En forma similar al caso anterior,

Si $t_D < 0,01$:

$$Q(t_D) = 2\sqrt{\frac{t_D}{\pi}} = 1,1284\sqrt{t_D} \qquad (53)$$

Si $t_D > 0,01$: usar la Ec.(52). Afortunadamente esta ecuación ha sido calculada como función de t_D. Los valores de $Q(t_D)$ se presentan en la Tabla IV para t_D entre 0 y 2×10^{12} y en las Figs.26 y 27 para valores de t_D entre 0,01 y 10^{10}.

Edwardson y otros[27] presentan las siguientes ecuaciones para el calculo de $Q(t_D)$ en función de t_D:

Si $0,01 < t_D < 200$:

TABLA IV - Valores de Intrusión Adimensional, $Q(t_D)$, como Función de Tiempo Adimensional, t_D. Caso 2: Acuífero (Yacimiento) Infinito, Presión Terminal Constante, Ec. (52), (Referencia 7 y 8). Figs. 26 y 27.

t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$
0,00	0,000	33	18,011	79	35,697	225	83,497
0,01	0,112	34	18,429	80	36,058	230	85,023
0,05	0,278	35	18,845	81	36,418	235	86,545
0,10	0,404	36	19,259	82	36,777	240	88,062
0,15	0,520	37	19,671	83	37,136	245	89,575
0,20	0,606	38	20,080	84	37,494	250	91,084
0,25	0,689	39	20,488	85	37,851	255	92,589
0,30	0,758	40	20,894	86	38,207	260	94,090
0,40	0,898	41	21,298	87	38,563	265	95,588
0,50	1,020	42	21,701	88	38,919	270	97,081
0,60	1,140	43	22,101	89	39,272	275	98,571
0,70	1,251	44	22,500	90	39,626	280	100,057
0,80	1,359	45	22,897	91	39,979	285	101,540
0,90	1,469	46	23,291	92	40,331	290	103,019
1	1,569	47	23,684	93	40,684	295	104,495
2	2,447	48	24,076	94	41,034	300	105,968
3	3,202	49	24,466	95	41,385	305	107,437
4	3,893	50	24,855	96	41,735	310	108,904
5	4,539	51	25,244	97	42,084	315	110,367
6	5,143	52	25,633	98	42,433	320	111,827
7	5,743	53	26,020	99	42,781	325	113,284
8	6,314	54	26,406	100	43,129	330	114,738
9	6,869	55	26,791	105	44,858	335	116,189
10	7,411	56	27,174	110	46,574	340	117,638
11	7,940	57	27,555	115	48,277	345	119,083
12	8,457	58	27,935	120	49,968	350	120,526
13	8,964	59	28,314	125	51,648	355	121,966
14	9,461	60	28,691	130	53,317	360	123,403
15	9,949	61	29,068	135	54,976	365	124,838
16	10,434	62	29,443	140	56,625	370	126,270
17	10,913	63	29,818	145	58,265	375	127,699
18	11,386	64	30,192	150	59,895	380	129,126
19	11,855	65	30,565	155	61,517	385	130,550
20	12,319	66	30,937	160	63,131	390	131,972
21	12,778	67	31,308	165	64,737	395	133,391
22	13,233	68	31,679	170	66,336	400	134,808
23	13,684	69	32,048	175	67,928	405	136,223
24	14,131	70	32,417	180	69,512	410	137,635
25	14,572	71	32,785	185	71,090	415	139,045
26	15,013	72	33,151	190	72,661	420	140,453
27	15,450	73	33,517	195	74,226	425	141,859
28	15,883	74	33,883	200	75,785	430	143,262
29	16,313	75	34,247	205	77,338	435	144,664
30	16,742	76	34,611	210	78,886	440	146,064
31	17,167	77	34,974	215	80,428	445	147,461
32	17,590	78	35,336	220	81,965	450	148,856

TABLA IV - (Continuación).

t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$
455	150,249	825	248,957	1225	349,460	1875	505,019
460	151,640	830	250,245	1230	350,688	1900	510,861
465	153,029	840	252,819	1240	353,144	1925	516,695
470	154,416	850	255,388	1250	355,597	1950	522,520
475	155,801	860	257,953	1260	358,048	1975	528,337
480	157,184	870	260,515	1270	360,496	2000	534,145
485	158,565	875	261,795	1275	361,720	2025	539,945
490	159,945	880	263,073	1280	362,942	2050	545,737
495	161,322	890	265,629	1290	365,386	2075	551,522
500	162,698	900	268,181	1300	367,828	2100	557,299
510	165,444	910	270,729	1310	370,267	2125	563,068
520	168,183	920	273,274	1320	372,704	2150	568,830
525	169,549	925	274,545	1325	373,922	2175	574,585
530	170,914	930	275,815	1330	375,139	2200	580,332
540	173,639	940	278,353	1340	377,572	2225	586,072
550	176,357	950	280,888	1350	380,003	2250	591,806
560	179,069	960	283,420	1360	382,432	2275	597,532
570	181,774	970	285,948	1370	384,859	2300	603,252
575	183,124	975	287,211	1375	386,070	2325	608,965
580	184,473	980	288,473	1380	387,283	2350	614,672
590	187,166	990	290,995	1390	389,705	2375	620,372
600	189,852	1000	293,514	1400	392,125	2400	626,066
610	192,533	1010	296,030	1410	394,543	2425	631,755
620	195,208	1020	298,543	1420	396,959	2450	637,437
625	196,544	1025	299,799	1425	398,167	2475	643,113
630	197,878	1030	301,053	1430	399,373	2500	648,781
640	200,542	1040	303,560	1440	401,786	2550	660,093
650	203,201	1050	306,065	1450	404,197	2600	671,379
660	205,854	1060	308,567	1460	406,606	2650	682,640
670	208,502	1070	311,066	1470	409,013	2700	693,877
675	209,825	1075	312,314	1475	410,214	2750	705,090
680	211,145	1080	313,562	1480	411,418	2800	716,280
690	213,784	1090	316,055	1490	413,820	2850	727,449
700	216,417	1100	318,545	1500	416,220	2900	738,598
710	219,046	1110	321,032	1525	422,214	2950	749,725
720	221,670	1120	323,517	1550	428,196	3000	760,833
725	222,980	1125	324,760	1575	434,168	3050	771,922
730	224,289	1130	326,000	1600	440,128	3100	782,992
740	226,904	1140	328,480	1625	446,077	3150	794,042
750	229,514	1150	330,958	1650	452,016	3200	805,075
760	232,120	1160	333,433	1675	457,945	3250	816,090
770	234,721	1170	335,906	1700	463,863	3300	827,088
775	236,020	1175	337,142	1725	469,771	3350	838,067
780	237,318	1180	338,376	1750	475,669	3400	849,028
790	239,912	1190	340,843	1775	481,558	3450	859,974
800	242,501	1200	343,308	1800	487,437	3500	870,903
810	245,086	1210	345,770	1825	493,307	3550	881,816
820	247,668	1220	348,230	1850	499,167	3600	892,712

TABLA IV - (Continuación).

t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$
3650	903,594	7100	1625,729	$2,5\text{x}10^{5}$	$4,066\text{x}10^{4}$	$6,0\text{x}10^{9}$	5,368x
3700	914,459	7200	1646,011	3,0x "	4,817x "	7,0x "	6,220x
3750	925,309	7300	1666,265	4,0x "	6,267x "	8,0x "	7,066x
3800	936,144	7400	1686,490	5,0x "	7,699x "	9,0x "	7,909x
3850	946,966	7500	1706,688	6,0x "	9,113x "	$1,0\text{x}10^{10}$	8,747x
3900	957,773	7600	1726,859	7,0x "	$1,051\text{x}10^{5}$	1,5x "	1,288x
3950	968,566	7700	1747,002	8,0x "	1,189x "	2,0x "	1,697x
4000	979,344	7800	7767,120	9,0x "	1,326x "	2,5x "	2,103x
4050	990,108	7900	1787,212	$1,0\text{x}10^{6}$	1,462x "	3,0x "	2,505x
4100	1000,858	8000	1807,278	1,5x "	2,126x "	4,0x "	3,299x
4150	1011,595	8100	1827,319	2,0x "	2,781x "	5,0x "	4,087x
4200	1022,318	8200	1847,336	2,5x "	3,427x "	6,0x "	4,868x
4250	1033,028	8300	1867,329	3,0x "	4,064x "	7,0x "	5,643x
4300	1043,724	8400	1387,298	4,0x "	5,313x "	8,0x "	6,414x
4350	1054,409	8500	1907,243	5,0x "	6,544x "	9,0x "	7,183x
4400	1065,082	8600	1927,166	6,0x "	7,761x "	$1,0\text{x}10^{11}$	7,948x
4450	1075,743	8700	1947,065	7,0x "	8,965x "	1,5x "	1,17 x
4500	1086,390	8800	1966,942	8,0x "	$1,016\text{x}10^{6}$	2,0x "	1,55 x
4550	1097,024	8900	1986,796	9,0x "	1,134x "	2,5x "	1,92 x
4600	1107,646	9000	2006,628	$1,0\text{x}10^{7}$	1,252x "	3,0x "	2,29 x
4650	1118,257	9100	2026,438	1,5x "	1,828x "	4,0x "	3,02 x
4700	1128,854	9200	2046,227	2,0x "	2,393x "	5,0x "	3,75 x
4750	1139,439	9300	2065,996	2,5x "	2,961x "	6,0x "	4,47 x
4800	1150,012	9400	2085,744	3,0x "	3,517x "	7,0x "	5,19 x
4850	1160,574	9500	2105,473	4,0x "	4,610x "	8,0x "	5,89 x
4900	1171,125	9600	2125,184	5,0x "	5,689x "	9,0x "	6,58 x
4950	1181,666	9700	2144,878	6,0x "	6,758x "	$1,0\text{x}10^{12}$	7,28 x
5000	1192,198	9800	2164,555	7,0x "	7,816x "	1,5x "	1,08 x
5100	1213,222	9900	2184,216	8,0x "	8,866x "	2,0x "	1,42 x
5200	1234,203	10000	2203,861	9,0x "	9,911x "		
5300	1255,141	12500	2668,967	$1,0\text{x}10^{8}$	$1,095\text{x}10^{7}$		
5400	1276,037	15000	3164,780	1,5x "	1,604x "		
5500	1296,893	17500	3633,368	2,0x "	2,108x "		
5600	1317,709	20000	4095,800	2,5x "	2,607x "		
5700	1338,486	25000	5005,726	3,0x "	3,100x "		
5800	1359,225	30000	5899,508	4,0x "	4,071x "		
5900	1379,927	35000	6780,247	5,0x "	5,032x "		
6000	1400,593	40000	7650,096	6,0x "	5,984x "		
6100	1421,224	50000	9363,099	7,0x "	6,928x "		
6200	1441,820	60000	11047,299	8,0x "	7,865x "		
6300	1462,383	70000	12708,358	9,0x "	8,797x "		
6400	1482,912	75000	13531,457	$1,0\text{x}10^{9}$	9,725x "		
6500	1503,408	80000	14350,121	1,5x "	1,429x "		
6600	1523,872	90000	15975,389	2,0x "	1,880x "		
6700	1544,305	100000	17586,284	2,5x "	2,328x "		
6800	1564,706	125000	21560,732	3,0x "	2,771x "		
6900	1585,077	150000	$2,538\text{x}10^{4}$	4,0x "	3,645x "		
7000	1605,418	200000	3,308x "	5,0x "	4,510x "		

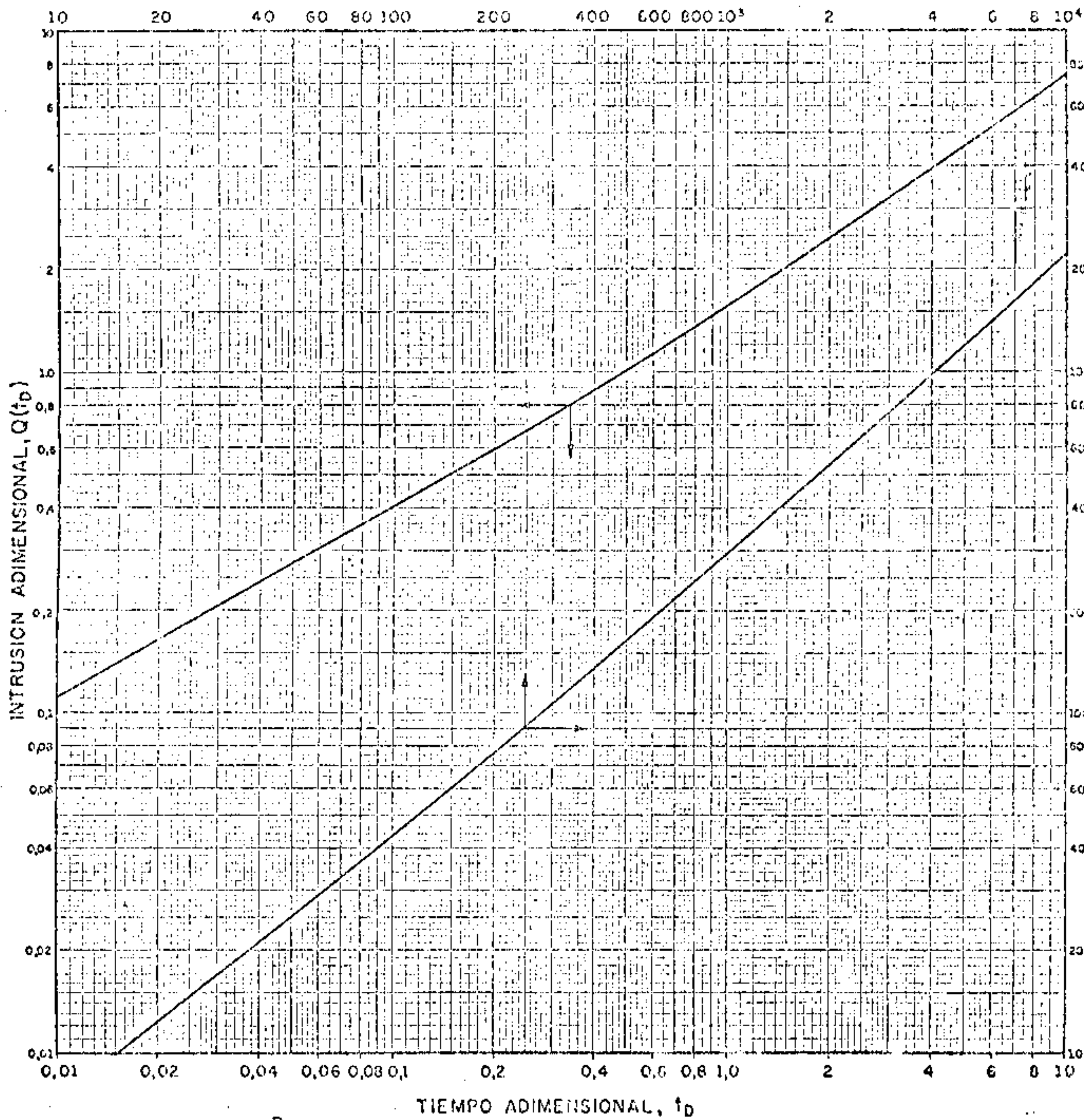


Fig. 26-Intrusión adimensional, $Q(t_D)$, como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial infinito. Presión (o caída de presión) constante, es decir, presión terminal constante. Intervalo de t_D: 10^{-2} a 10^4 (Referencias 7 y 8).

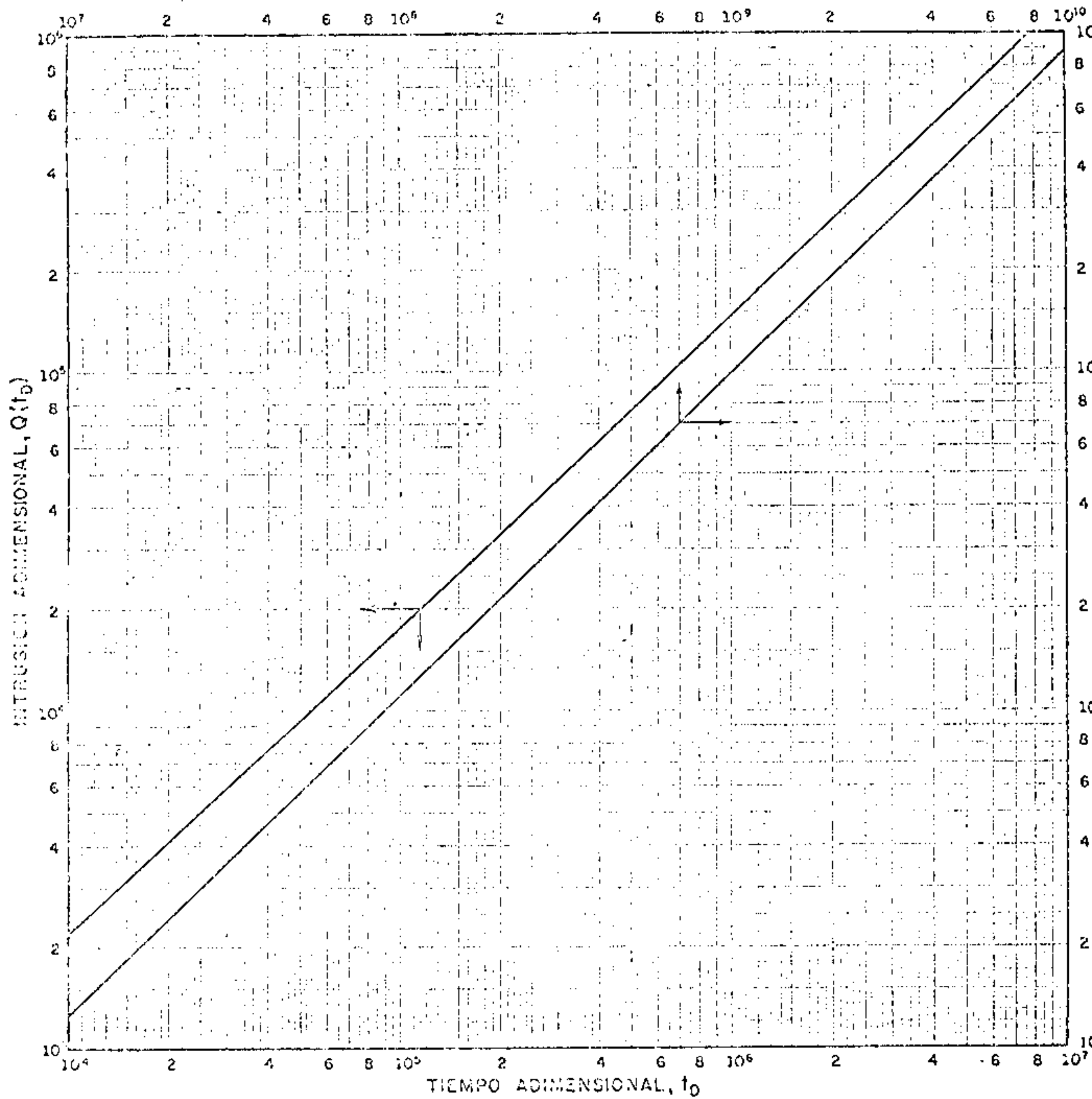


Fig. 27-Intrusión adimensional, $Q(t_D)$, como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial infinito. Presión (o caída de presión) constante, es decir, presión terminal constante. Intervalo de t_D: 10^4 a 10^{10}. (Referencias 7 y 8).

$$Q(t_D) = \frac{1,12838\sqrt{t_D} + 1,19328t_D + 0,269872t_D\sqrt{t_D} + 0,00855294(t_D)^2}{1 + 0,616599\sqrt{t_D} + 0,0413008t_D} \quad (5$$

Máximo error, respecto al valor exacto, 0,02 por ciento

Si $t_D \geq 200$:

$$Q(t_D) = \frac{-4,29881 + 2,02566t_D}{\ln(t_D)} \quad (59$$

Máximo error, respecto al valor exacto, 0,07 por ciento.

II - Acuíferos Finitos (Limitados) - En este caso, r tiene un valor máximo constante denominado r_e, correspondiente al límite exterior. El valor adimensional de este radio r_e será $r_{eD} = r_e/R_i$ (en el caso de yacimiento $r_{eD} = r_e/r_w$).

Existen cuatro soluciones para este tipo de acuíferos: dos de Rata Terminal Constante y dos de Presión Terminal Constante. Se han denominado Caso 3 y Caso 4 a las dos primeras y Caso 5 y Caso 6 a las dos últimas. A continuación se describen las condiciones de límite y las soluciones para cada una de estos casos:

Caso 3 - Rata de intrusión constante en el límite interior (contacto agua-petróleo) y acuífero cerrado, es decir, rata de flujo en el límite exterior igual a cero. Analíticamente las condiciones límite son:

Unidades Dimensionales	Unidades Adimensionales
a) Igual a la Condición a) del Caso 1	
b) $(e)_{r_e} = 0$, para $t > 0$	

En otra forma:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r_e} = 0, \text{para } t > 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}(r_e,t) = 0 \qquad\qquad \frac{\partial p}{\partial r_D}(r_{eD},t_D) = 0$$

Este caso también fué resuelto por van Everdingen y Hurst[7]. Presentan la Ec.(56) para el cálculo de la presión a cualquier radio r y a cualquier tiempo t,

$$p(r,t) = pi - \frac{141,2\ (e)_{Ri}\ \mu}{kh}\Delta p(r_D,t_D) \tag{56}$$

donde,

$$\Delta p(r_D,t_D) = \frac{2}{(r_{eD})^2-1}\left[\frac{r_D^2}{4} + t_D\right] - \frac{(r_{eD})^2\ \ln(r_D)}{(r_{eD})^2 - 1} - \frac{3(r_{eD})^4 - 4(r_{eD})^4\ \ln(r_{eD}) - 2(r_{eD})^2 - 1}{4\left[(r_{eD})^2 - 1\right]^2} +$$

$$+ \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a_n^2 t_D}\ J_1^2(a_n\ r_{eD})\left[J_1(a_n)Y_0(a_n r_D) - Y_1(a_n)J_0(a_n\ r_D)\right]}{a_n\left[J_1^2\ (a_n\ r_{eD}) - J_1^2\ (a_n)\right]} \tag{57}$$

donde a_n son las raices de la ecuación,

$$J_1(a_n\ r_{eD})\ Y_1(a_n) - J_1\ (a_n)\ Y_1\ (a_n\ r_{eD}) = 0 \tag{58}$$

De la Ec.(57) no se han dado soluciones en forma tabulada. Es prácticamente la misma solución dada por Muskat[24].

El caso 3 también ha sido resuelto por vEH[7] para obtener la

presión en el contacto agua-petróleo (o en el pozo) a cualquier tiempo t,

$$p(R_i,t) = pi - \frac{141,2\ (q)_{Ri}\ \mu}{kh} \Delta p(t_D) \qquad (59)$$

donde,

$$\Delta p(t_D) = \Delta p(1,r_D) = \frac{1 + 4t_D}{2\left[(r_{eD})^2-1\right]} - \frac{3(r_{eD})^2-4(r_{eD})^4\ \ln(r_{eD})-2(r_{eD})^2-1}{4\left[(r_{eD})^2 - 1\right]^2}$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a_n^2 t_D}\ J_1^2(a_n\ r_{eD})}{a_n^2\left[J_1^2(a_n\ r_{eD}) - J_1^2(a_n)\right]} \qquad (60)$$

donde a_n, como antes, son las raíces de la Ec.(58). La Ec.(60) no es más que la Ec.(57) para $r_D=1$

Si $t_D < 0,01$: usar la Ec.(39) para calcular $\Delta p(t_D)$. vEH[7] presentan la solución de la Ec.(60) para r_{eD} entre 1,5 y 10,0. Sus resultados se presentan en la Tabla V y la Fig.28. Para otros valores de r_{eD} se ha calculado $\Delta p(t_D)$ usando la función $F(t_{DA})$ de MBH, desarrollada por Matthews, Brons y Hazebroek[23], de acuerdo a la siguiente ecuación y según se deduce en el Apéndice B,

$$\Delta p(t_D) = \frac{1}{2}\left[- Ei\left(- \frac{1}{4t_D}\right) + 4\pi t_{DA} - F(t_{DA})\right] \qquad (61)$$

donde t_{DA} es el tiempo adimensional en base al área (ver Apéndice B). Para un círculo, la relación entre t_D y t_{DA} es,

$$t_D = \pi(r_{eD})^2 t_{DA} \qquad (62)$$

Los resultados de los cálculos de la Ec.(61) para r_{eD} entre 20 y 25000 se presentan también en la Tabla V y se han graficado, para r_{eD} entre 100 y 25000, en las Figs.29 y 30.

Caso 4 - Rata de intrusión constante en el límite interior (contacto agua-petróleo) y presión constante en el límite exterior. Analíticamente, las condiciones de límite son:

Unidades Dimensionales	Unidades Adimensionales
a) Igual a la Condición a) del Caso 1	
b) p = pi para r = r_e y para todo t.	
$p(r_e,t) = pi$	$P(r_D,t_D) = 0$

Este caso ha sido resuelto analíticamente por Hurst[26] considerando un cilindro como fuente y Muskat[24] considerando una línea como fuente. En ambos casos, la solución permite calcular la presión en el contacto agua-petróleo (o en el pozo),

$$p(R_i,t) = pi - \frac{141,2(c)_{Ri}\ \mu}{kh}\Delta p(t_D) \tag{63}$$

donde: (1) Para la solución de un cilindro como fuente:

$$\Delta p(t_D) = \Delta p(1,t_D) = \ln(r_{eD}) - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-a_n^2 t_D}\, J_o^2(a_n\, r_{eD})}{a_n^2\left[J_1^2(a_n) - J_o^2(a_n\, r_{eD})\right]} \tag{64}$$

donde a_n son las raíces de la ecuación,

$$J_1(a_n)\ Y_o(a_n\, r_{eD}) - Y_1(a_n)\ J_o(a_n\, r_{eD}) = 0 \tag{65}$$

(2) Para la solución considerando una línea como fuente:

TABLA V - Valores del Cambio de Presión Adimensional, $\Delta p(t_D)$ como Función de Tiempo Adimensional, t_D, para Valores de r_{eD} entre 1,5 y 25000, Caso 3: Acuífero (Yacimiento) Radial Limitado (Finito). Rata de Intrusión (Producción) Constante en el Límite Interior e igual a Cero en el Límite Exterior (Acuífero Cerrado). Valores de r_{eD} entre 1,5 y 10. Ec.(60), Referencias 7 y 8, Fig. 28; los demás Valores Calculados por el Autor, Ec.(61), Figs 29 y 30.

r_{eD} = 1,5		r_{eD} = 2		r_{eD} = 2,5		r_{eD} = 3		r_{eD} = 3,5		r_{eD} = 4	
t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$
0,06	0,251	0,22	0,443	[illegible]	0,565	0,52	0,627	1,0	0,802	1,5	0,927
0,08	0,288	0,24	0,459	0,42	0,576	0,54	0,636	1,1	0,830	1,6	0,948
0,10	0,322	0,26	0,476	0,44	0,587	0,56	0,645	1,2	0,857	1,7	0,968
0,12	0,355	0,28	0,492	0,46	0,593	0,60	0,662	1,3	0,882	1,8	0,988
0,14	0,387	0,30	0,507	0,48	0,608	0,65	0,683	1,4	0,906	1,9	1,007
0,16	0,420	0,32	0,522	0,50	0,628	0,70	0,703	1,5	0,929	2,0	1,025
0,18	0,452	0,34	0,536	0,52	0,628	0,75	0,721	1,6	0,951	2,2	1,059
0,20	0,484	0,36	0,551	0,54	0,633	0,80	0,740	1,7	0,973	2,4	1,092
0,22	0,516	0,38	0,565	0,56	0,647	0,85	0,758	1,8	0,994	2,6	1,123
0,24	0,548	0,40	0,579	0,58	0,657	0,90	0,776	1,9	1,014	2,8	1,154
0,26	0,580	0,42	0,593	0,60	0,666	0,95	0,791	2,0	1,034	3,0	1,184
0,28	0,612	0,44	0,607	0,65	0,686	1,00	0,806	2,25	1,083	3,5	1,255
0,30	0,644	0,46	0,621	0,70	0,710	1,20	0,865	2,50	1,130	4,0	1,324
0,35	0,724	0,48	0,634	0,75	0,731	1,40	0,920	2,75	1,176	4,5	1,392
0,40	0,804	0,50	0,648	0,80	0,752	1,60	0,973	3,0	1,221	5,0	1,460
0,45	0,884	0,60	0,715	0,85	0,772	2,00	1,076	4,0	1,401	5,5	1,527
0,50	0,964	0,70	0,782	0,90	0,792	3,00	1,328	5,0	1,579	6,0	1,594
0,55	1,044	0,80	0,849	0,95	0,812	4,00	1,578	6,0	1,757	6,5	1,660
0,60	1,124	0,90	0,915	1,00	0,832	5,00	1,828			7,0	1,727
		1,00	0,982	2,00	1,215					8,0	1.861
		2,00	1,649	3,00	1,596					9,0	1,994
		3,00	2,316	4,00	1,977					10,0	2,127
		5,00	3,649	5,00	2,358						

TABLA V - (Continuación).

$r_{eD} = 4,5$		$r_{eD} = 5$		$r_{eD} = 6$		$r_{eD} = 7$		$r_{eD} = 8$		$r_{eD} = 9$	
t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$
2,0	1,023	3,0	1,167	4,0	1,275	6,0	1,436	8,0	1,556	10,0	1,651
2,1	1,040	3,1	1,180	4,5	1,322	6,5	1,470	8,5	1,582	10,5	1,673
2,2	1,056	3,2	1,192	5,0	1,364	7,0	1,501	9,0	1,607	11,0	1,693
2,3	1,072	3,3	1,204	5,5	1,404	7,5	1,531	9,5	1,631	11,5	1,713
2,4	1,087	3,4	1,215	6,0	1,441	8,0	1,559	10,0	1,653	12,0	1,732
2,5	1,102	3,5	1,227	6,5	1,477	8,5	1,586	10,5	1,675	12,5	1,750
2,6	1,116	3,6	1,238	7,0	1,511	9,0	1,613	11,0	1,697	13,0	1,768
2,7	1,130	3,7	1,249	7,5	1,544	9,5	1,638	11,5	1,717	13,5	1,786
2,8	1,144	3,8	1,259	8,0	1,576	10,0	1,663	12,0	1,737	14,0	1,803
2,9	1,158	3,9	1,270	8,5	1,607	11,0	1,711	12,5	1,757	14,5	1,819
3,0	1,171	4,0	1,281	9,0	1,638	12,0	1,757	13,0	1,776	15,0	1,835
3,2	1,197	4,2	1,301	9,5	1,668	13,0	1,801	13,5	1,795	15,5	1,851
3,4	1,222	4,4	1,321	10,0	1,698	14,0	1,845	14,0	1,813	16,0	1,867
3,6	1,246	4,6	1,340	11,0	1,757	15,0	1,888	14,5	1,831	17,0	1,897
3,8	1,269	4,8	1,360	12,0	1,815	16,0	1,931	15,0	1,849	18,0	1,926
4,0	1,292	5,0	1,378	13,0	1,873	17,0	1,974	17,0	1,919	19,0	1,955
4,5	1,349	5,5	1,424	14,0	1,931	18,0	2,016	19,0	1,986	20,0	1,983
5,0	1,403	6,0	1,469	15,0	1,988	19,0	2,058	21,0	2,051	22,0	2,037
5,5	1,457	6,5	1,513	16,0	2,045	20,0	2,100	23,0	2,116	24,0	2,090
6,0	1,510	7,0	1,556	17,0	2,103	22,0	2,184	25,0	2,180	26,0	2,142
7,0	1,615	7,5	1,598	18,0	2,160	24,0	2,267	30,0	2,340	28,0	2,193
8,0	1,719	8,0	1,641	19,0	2,217	26,0	2,351	35,0	2,499	30,0	2,244
9,0	1,823	9,0	1,725	20,0	2,274	28,0	2,434	40,0	2,658	34,0	2,346
10,0	1,927	10,0	1,808	25,0	2,560	30,0	2,517	45,0	2,817	40,0	2,496
11,0	2,031	11,0	1,892	30,0	2,846					45,0	2,621
12,0	2,135	12,0	1,975							50,0	2,746
13,0	2,239	13,0	2,058								
14,0	2,343	14,0	2,142								
15,0	2,447	15,0	2,225								

TABLA V - (Continuación).

$r_{eD} = 10$		$r_{eD} = 20$		$r_{eD} = 50$		$r_{eD} = 100$		$r_{eD} = 200$		$r_{eD} = 500$	
t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$
12,0	1,732	15	1,778	30	2,291	$5,0x10^2$	3,520	$1,0x10^4$	5,031	$5,0x10^4$	5,824
12,5	1,750	16	1,805	40	2,338	7,0x "	3,693	1,5x "	5,298	6,0x "	5,923
13,0	1,768	17	1,835	50	2,405	9,0x "	3,813	2,0x "	5,548	7,0x "	6,015
14,0	1,801	18	1,864	60	2,475	$1,0x10^3$	3,871	2,5x "	5,798	8,0x "	6,105
14,5	1,817	19	1,891	80	2,604	1,5x "	4,069	3,0x "	6,048	9,0x "	6,185
15,0	1,832	20	1,917	100	2,714	2,0x "	4,215	4,0x "	6,548	$1,0x10^5$	6,265
15,5	1,847	22	1,965	120	2,807	2,5x "	4,338	5,0x "	7,048	1,5x "	6,665
16,0	1,862	24	2,010	150	2,931	3,0x "	4,450	6,0x "	7,548	2,0x "	7,065
17,0	1,890	26	2,050	200	3,067	4,0x "	4,655	7,0x "	8,048	2,5x "	7,465
18,0	1,917	28	2,087	250	3,178	5,0x "	4,855	8,0x "	8,548	3,0x "	7,865
19,0	1,943	30	2,122	300	3,267	6,0x "	5,055	9,0x "	9,048	4,0x "	8,665
20,0	1,968	35	2,199	400	3,408	8,0x "	5,455	$1,0x10^5$	9,548	5,0x "	9,465
22,0	2,017	40	2,264	500	3,522	$1,0x10^4$	5,855	1,5x "	12,048	6,0x "	10,265
24,0	2,063	50	2,373	600	3,621	1,5x "	6,855	2,0x "	14,548	7,0x "	11,065
26,0	2,108	60	2,462	700	3,713	2,0x "	7,855	2,5x "	17,048	8,0x "	11,865
28,0	2,151	80	2,507	800	3,502	2,5x "	8,855	3,0x "	19,548	9,0x "	12,665
30,0	2,194	90	2,570	900	3,882	3,0x "	9,855	4,0x "	24,548	$1,0x10^6$	13,465
32,0	2,236	100	2,729	1000	3,962	4,0x "	11,855	5,0x "	29,548	1,2x "	15,065
34,0	2,278	110	2,786	1500	4,362	5,0x "	13,855			1,5x "	17,465
36,0	2,319	120	2,841	2000	4,762	6,0x "	15,855			2,0x "	21,465
38,0	2,360	130	2,897	2500	5,162	7,0x "	17,855			2,5x "	25,465
40,0	2,401	140	2,947	3000	5,562	8,0x "	19,855			3,0x "	29,465
50,0	2,604	150	3,047			9,0x "	21,855				
60,0	2,806										
70,0	3,009										

TABLA V - (Continuación).

$r_{eD} = 1000$		$r_{eD} = 2000$		$r_{eD} = 5000$		$r_{eD} = 10000$		$r_{eD} = 25000$	
t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$
$1,0x10^5$	6,173	$5,0x10^5$	6,975	$2,0x10^6$	7,672	$5,0x10^6$	8,125	$2,0x10^7$	8,818
1,5x "	6,372	7,0x "	7,142	2,5x "	7,783	6,0x "	8,219	3,0x "	9,021
2,0x "	6,517	8,0x "	7,210	3,0x "	7,872	7,0x "	8,298	4,0x "	9,168
2,5x "	6,640	9,0x "	7,274	4,0x "	8,013	8,0x "	8,365	5,0x "	9,281
3,0x "	6,752	$1,0x10^6$	7,333	5,0x "	8,127	9,0x "	8,424	6,0x "	9,372
4,0x "	6,958	1,5x "	7,601	6,0x "	8,226	$1,0x10^7$	8,476	7,0x "	9,448
5,0x "	7,158	2,0x "	7,851	7,0x "	8,318	1,5x "	8,674	8,0x "	9,513
6,0x "	7,358	2,5x "	8,101	8,0x "	8,407	2,0x "	8,820	9,0x "	9,570
7,0x "	7,558	3,0x "	8,351	9,0x "	8,487	2,5x "	8,943	$1,0x10^8$	9,622
8,0x "	7,758	4,0x "	8,851	$1,0x10^7$	8,567	3,0x "	9,055	1,5x "	9,836
9,0x "	7,958	5,0x "	9,351	1,5x "	8,967	4,0x "	9,260	2,0x "	10,017
$1,0x10^6$	8,158	6,0x "	9,851	2,0x "	9,367	5,0x "	9,460	2,5x "	10,177
1,5x "	9,158	7,0x "	10,351	2,5x "	9,767	6,0x "	9,660	3,0x "	10,377
2,0x "	10,158	8,0x "	10,851	3,0x "	10,167	7,0x "	9,860	4,0x "	10,657
2,5x "	11,158	9,0x "	11,351	4,0x "	10,967	8,0x "	10.060	5,0x "	10,977
3,0x "	12,158	$1,0x10^7$	11,851	5,0x "	11,767	9,0x "	10,260	6,0x "	11,297
4,0x "	14,158	1,5x "	14,351	6,0x "	12,567	$1,0x10^8$	10,460	7,0x "	11,617
5,0x "	16,158	2,0x "	16,851	7,0x "	13,367	1,5x "	11,460	8,0x "	11,937
6,0x "	18,158	2,5x "	19,351	8,0x "	14,167	2,0x "	12,460	9,0x "	12,257
7,0x "	20,158	3,0x "	21,851	9,0x "	14,967	2,5x "	13,460	$1,0x10^9$	12,577
8,0x "	22,158	4,0x "	26,851	$1,0x10^8$	15,767	3,0x "	14,460	1,5x "	14,177
9,0x "	24,158			1,2x "	17,367	4,0x "	16,460	2,0x "	15,777
$1,0x10^7$	26,158			1,5x "	19,767	5,0x "	18,460	3,0x "	18,977
				2,0x "	23,767	6,0x "	20,460	4,0x "	22,177
				2,5x "	27,767	7,0x "	22,460	5,0x "	25,377
						8,0x "	24,460		
						9,0x "	26,460		

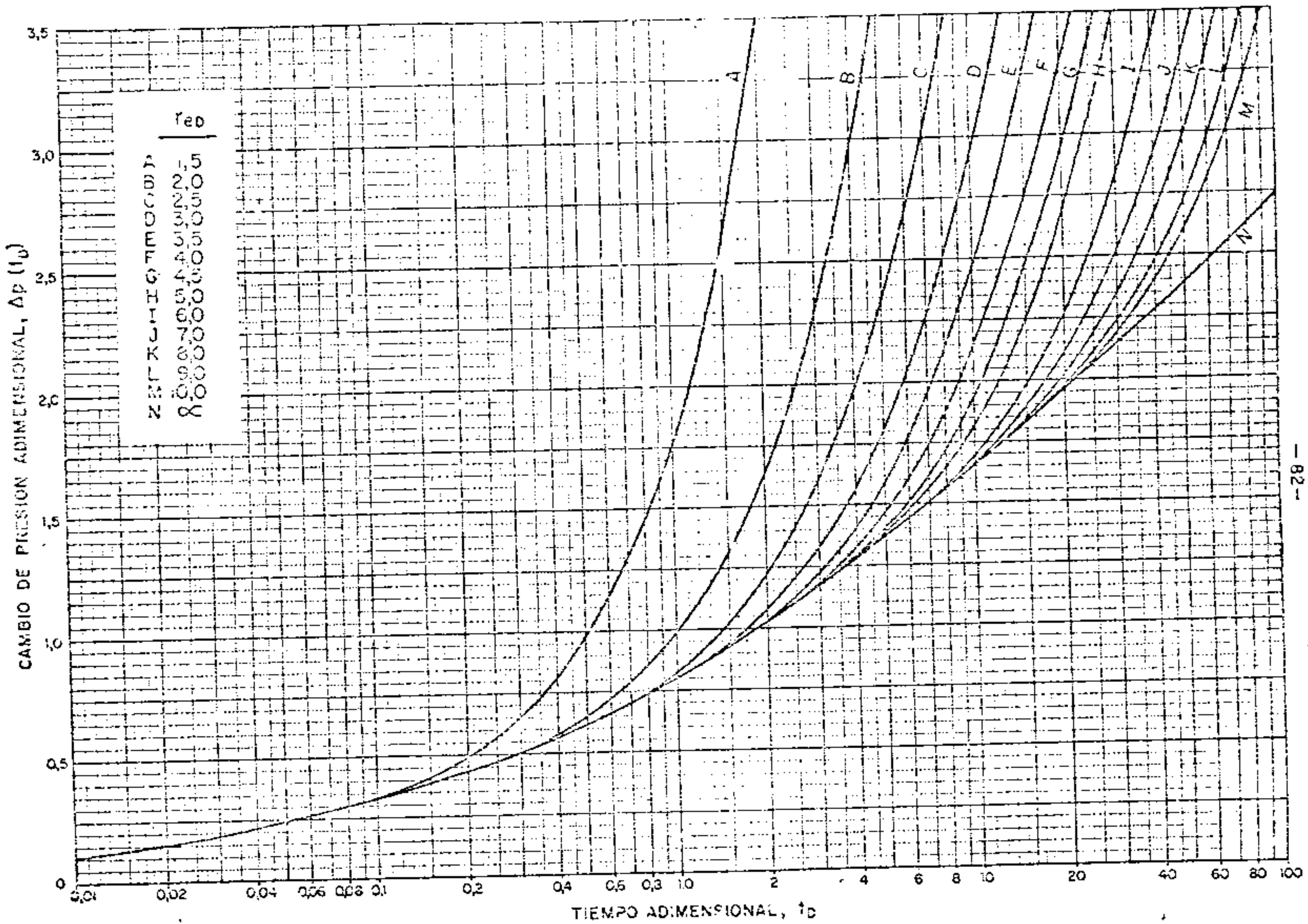


Fig. 28-Cambio de presión adimensional como función de tiempo adimensional. Sistema radial limitado (finito). Rata de producción (intrusión) constante y rata de flujo igual a cero en el limite exterior (limite exterior cerrado). (Refers: 7 y 8).

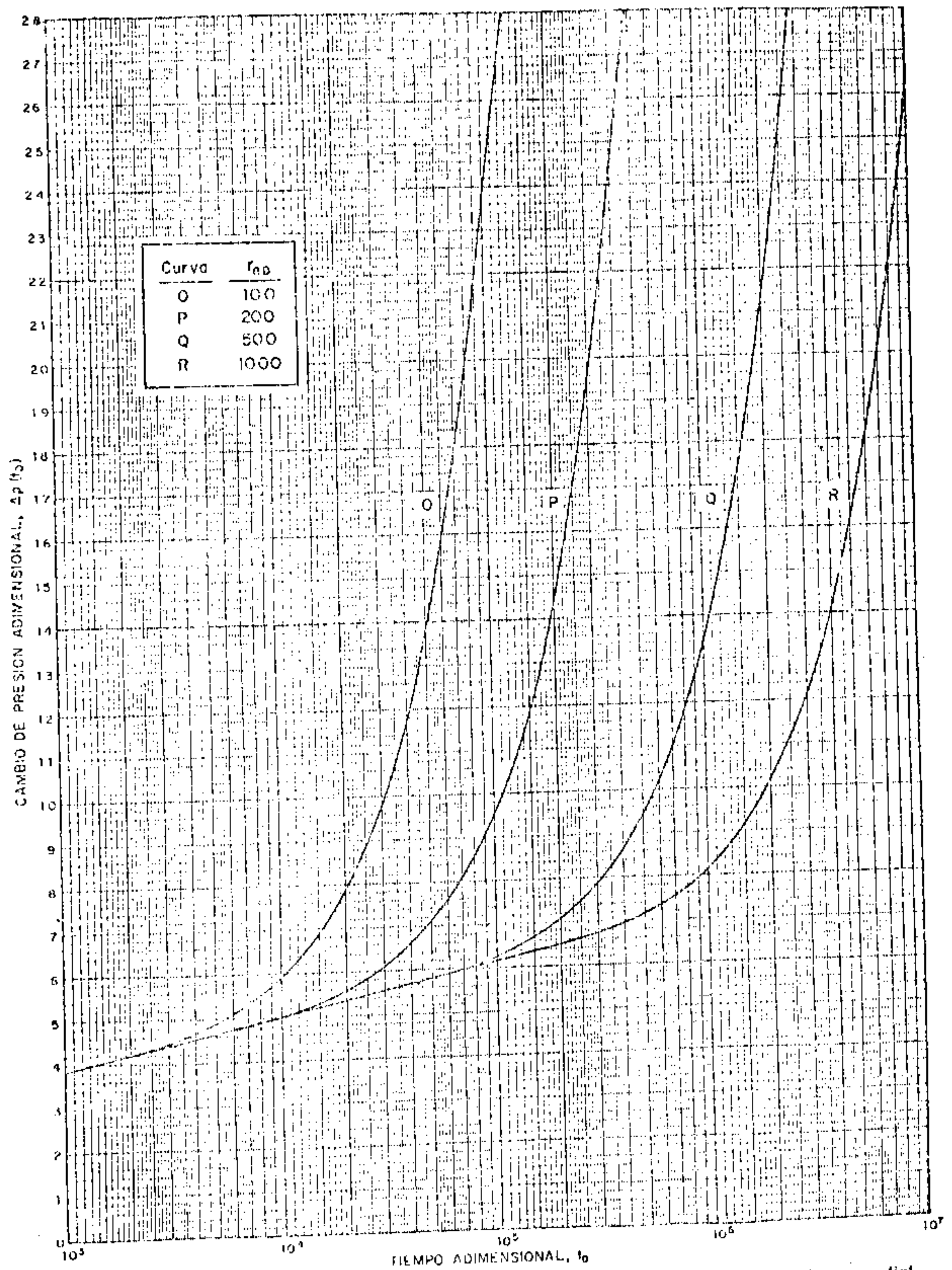


Fig. 29 - Cambio de presión adimensional, $\Delta p(t_D)$, como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito). Rata de intrusión constante en el límite interior (contacto agua petróleo) y acuífero cerrado, es decir, rata de flujo en el límite exterior igual a cero.

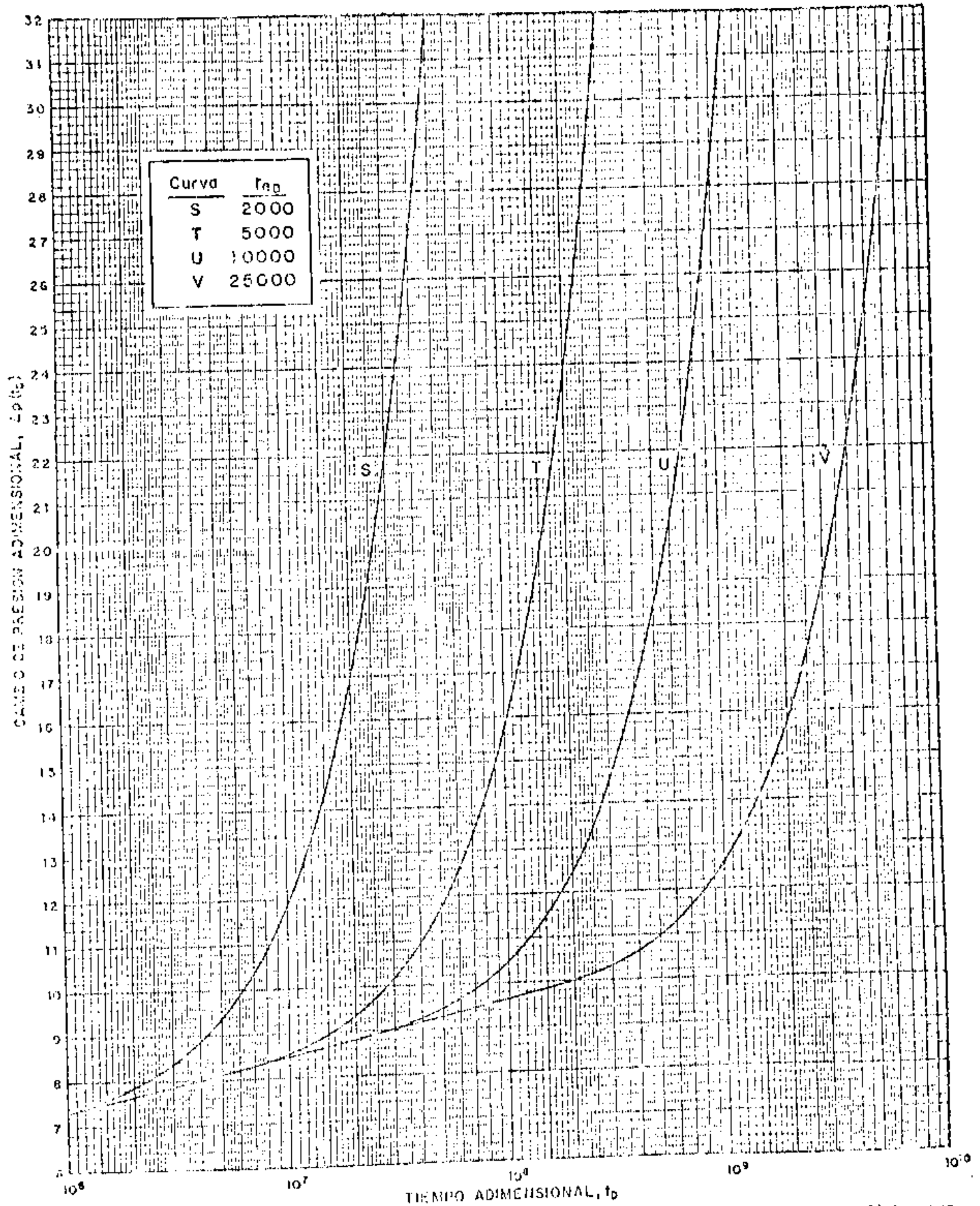


Fig. 30 – Cambio de presión adimensional, $\Delta p (t_D)$, como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito). Rata de intrusión constante en el límite interior (contacto agua-petróleo) y acuífero cerrado, es decir, rata de flujo en el límite exterior igual a cero.

$$\Delta p(t_D) = \Delta p(1,t_D) = \ln(r_{eD}) - \frac{2}{r_{eD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-b_n^2 t_D} J_o(b_n)}{b_n^2 \, J_1^2(b_n \, r_{eD})} \qquad (66)$$

donde b_n son las raices de la ecuación,

$$J_o(b_n \, r_{eD}) = 0 \qquad (67)$$

van Everdingen y Hurst[7] presentan cálculos de las Ecs.(64) y (66) como función de t_D , para diferentes valores de r_{eD}. Para valores de r_{eD} entre 1,5 y 50, se calculó según la Ec.(64) y para r_{eD} entre 60 a 3000 según la Ec.(66). Los resultados se presentan en la Tabla VI y en las Figs.31 a 34.

Si $t_D < 0{,}01$: usar la Ec.(39) para el cálculo de $\Delta p(t_D)$.

Si $t_D > (r_{eD})^2$, ocurre flujo continuo, es decir, el valor de $\Delta p(t_D)$ es máximo y toma en valor constante e igual a,

$$\Delta p(t_D) = \ln(r_{eD}) \qquad (68)$$

<u>Caso 5-</u> Presión constante en el límite interior (contacto agua-petróleo) y acuífero cerrado, es decir, rata de flujo en el límite exterior igual a cero. Analíticamente, las condiciones de límite son:

a) Igual a la Condición a) del Caso 1

b) Igual a la Condición b) del Caso 3

La solución para este caso, dada por vEH[7], permite el cálculo del fluido total que pasa por el límite inferior (contacto agua - petróleo) en un tiempo dado t,

TABLA VI - Valores del Cambio de Presión Adimensional, $\Delta p(t_D)$, como Función del Tiempo Adimensional, t_D, para Valores de r_{eD} entre 1,5 y 3000. Caso 4: Acuífero (Yacimiento) Radial Limitado. (Finito). Rata de Intrusión (Producción) Constante en el Límite Interior y Presión Constante en el Límete Exterior. Valores de r_{eD} entre 1,5 y 50, Ec.(64) y Valores de r_{eD} entre 60 y 3000, Ec.(66). (Referencias 7 y 8). Figs. 31 a 34.

$r_{eD} = 1,5$		$r_{eD} = 2$		$r_{eD} = 2,5$		$r_{eD} = 3$		$r_{eD} = 3,5$		$r_{eD} = 4$	
t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$
0,050	0,230	0,20	0,424	0,30	0,502	0,50	0,617	0,50	0,620	1,0	0,802
0,055	0,240	0,22	0,441	0,35	0,535	0,55	0,640	0,60	0,665	1,2	0,857
0,060	0,249	0,24	0,457	0,40	0,564	0,60	0,662	0,70	0,705	1,4	0,905
0,070	0,266	0,26	0,472	0,45	0,591	0,70	0,702	0,80	0,741	1,6	0,947
0,080	0,282	0,28	0,485	0,50	0,616	0,80	0,738	0,90	0,774	1,8	0,986
0,090	0,292	0,30	0,498	0,55	0,638	0,90	0,770	1,0	0,804	2,0	1,020
0,10	0,307	0,35	0,527	0,60	0,659	1,0	0,799	1,2	0,858	2,2	1,052
0,12	0,328	0,40	0,552	0,70	0,696	1,2	0,850	1,4	0,904	2,4	1,080
0,14	0,344	0,45	0,573	0,80	0,728	1,4	0,892	1,6	0,945	2,6	1,106
0,16	0,356	0,50	0,591	0,90	0,755	1,6	0,927	1,8	0,981	2,8	1,130
0,18	0,367	0,55	0,606	1,0	0,778	1,8	0,955	2,0	1,013	3,0	1,152
0,20	0,375	0,60	0,619	1,2	0,815	2,0	0,980	2,2	1,041	3,4	1,190
0,22	0,381	0,65	0,630	1,4	0,842	2,2	1,000	2,4	1,065	3,8	1,222
0,24	0,386	0,70	0,639	1,6	0,861	2,4	1,016	2,6	1,087	4,5	1,266
0,26	0,390	0,75	0,647	1,8	0,876	2,6	1,030	2,8	1,105	5,0	1,290
0,28	0,393	0,80	0,654	2,0	0,887	2,8	1,042	3,0	1,123	5,5	1,309
0,30	0,396	0,85	0,660	2,2	0,895	3,0	1,051	3,5	1,158	6,0	1,325
0,35	0,400	0,90	0,665	2,4	0,900	3,5	1,069	4,0	1,183	7,0	1,347
0,40	0,402	0,95	0,669	2,6	0,905	4,0	1,080	5,0	1,215	8,0	1,361
0,45	0,404	1,0	0,673	2,8	0,908	4,5	1,087	6,0	1,232	9,0	1,370
0,50	0,405	1,2	0,682	3,0	0,910	5,0	1,091	7,0	1,242	10,0	1,376
0,60	0,405	1,4	0,688	3,5	0,913	5,5	1,094	8,0	1,247	12,0	1,382
0,70	0,405	1,6	0,690	4,0	0,915	6,0	1,096	9,0	1,250	14,0	1,385
0,80	0,405	1,8	0,692	4,5	0,916	6,5	1,097	10,0	1,251	16,0	1,386
		2,0	0,692	5,0	0,916	7,0	1,097	12,0	1,252	18,0	1,386
		2,5	0,693	5,5	0,916	8,0	1,098	14,0	1,253		
		3,0	0,693	6,0	0,915	10,0	1,099	16,0	1,253		

TABLA VI (Continuación).

$r_{eD} = 6$		$r_{eD} = 8$		$r_{eD} = 10$		$r_{eD} = 15$		$r_{eD} = 20$		$r_{eD} = 25$	
t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$
4,0	1,275	7,0	1,499	10	1,651	20	1,960	30	2,148	50	2,389
4,5	1,320	7,5	1,527	12	1,730	22	2,003	35	2,219	55	2,434
5,0	1,361	8,0	1,554	14	1,793	24	2,043	40	2,282	60	2,476
5,5	1,398	8,5	1,580	16	1,855	26	2,080	45	2,338	65	2,514
6,0	1,432	9,0	1,604	18	1,907	28	2,114	50	2,388	70	2,550
6,5	1,462	9,5	1,627	20	1,952	30	2,146	60	2,475	75	2,583
7,0	1,490	10,0	1,648	25	2,043	35	2,219	70	2,547	80	2,614
7,5	1,516	12,0	1,724	30	2,111	40	2,279	80	2,609	85	2,643
8,0	1,539	14,0	1,786	35	2,160	45	2,232	90	2,658	90	2,671
8,5	1,561	16,0	1,837	40	2,197	50	2,379	100	2,707	95	2,697
9,0	1,580	18,0	1,879	45	2,224	60	2,455	105	2,728	100	2,721
10,0	1,615	20,0	1,914	50	2,245	70	2,513	110	2,747	120	2,807
12,0	1,667	22,0	1,943	55	2,260	80	2,558	115	2,764	140	2,878
14,0	1,704	24,0	1,967	60	2,271	90	2,592	120	2,781	160	2,936
16,0	1,730	26,0	1,986	65	2,279	100	2,619	125	2,796	180	2,984
18,0	1,749	28,0	2,002	70	2,285	120	2,655	130	2,810	200	3,024
20,0	1,762	30,0	2,026	75	2,290	140	2,677	135	2,823	220	3,057
22,0	1,771	35,0	2,040	80	2,293	160	2,689	140	2,835	240	3,085
24,0	1,777	40,0	2,055	90	2,297	180	2,697	145	2,846	260	3,107
26,0	1,781	45,0	2,064	100	2,300	200	2,701	150	2,857	280	3,126
28,0	1,784	50,0	2,070	110	2,301	220	2,704	160	2,876	300	3,142
30,0	1,787	60,0	2,076	120	2,302	240	2,706	180	2,906	350	3,171
35,0	1,789	70,0	2,078	130	2,302	260	2,707	200	2,929	400	3,189
40,0	1,791	80,0	2,079	140	2,302	280	2,707	240	2,958	450	3,200
50,0	1,792			160	2,303	300	2,708	280	2,975	500	3,207
								300	2,980	600	3,214
								400	2,992	700	3,217
								500	2,995	800	3,218
										900	3,219

TABLA VI (Continuación).

r_{eD} = 30		r_{eD} = 40		r_{eD} = 50		r_{eD} = 60		r_{eD} = 70		r_{eD} = 80	
t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$
70	2,551	120	2,818	200	3,064	300	3,237	500	3,512	600	3,603
80	2,615	140	2,868	220	3,111	400	3,401	600	3,603	700	3,680
90	2,672	160	2,953	240	3,154	500	3,512	700	3,680	800	3,747
100	2,723	180	3,011	260	3,193	600	3,602	800	3,746	900	3,805
120	2,812	200	3,063	280	3,229	700	3,676	900	3,803	1000	3,857
140	2,886	220	3,109	300	3,283	800	3,739	1000	3,854	1200	3,946
160	2,950	240	3,152	350	3,339	900	3,792	1200	3,937	1400	4,019
165	2,965	260	3,191	400	3,405	1000	3,832	1400	4,003	1500	4,051
170	2,979	280	3,226	450	3,461	1200	3,908	1600	4,054	1600	4,080
175	2,992	300	3,259	500	3,512	1400	3,959	1800	4,095	1800	4,130
180	3,005	350	3,331	550	3,556	1600	3,996	2000	4,127	2000	4,171
200	3,054	400	3,391	600	3,595	1800	4,023	2500	4,181	2500	4,242
250	3,150	450	3,440	650	3,630	2000	4,043	3000	4,211	3000	4,297
300	3,219	500	3,492	700	3,661	2500	4,071	3500	4,228	3500	4,328
350	3,269	550	3,516	750	3,688	3000	4,084	4000	4,237	4000	4,347
400	3,306	600	3,545	800	3,713	3500	4,090	4500	4,242	4500	4,360
450	3,332	650	3,568	850	3,735	4000	4,092	5000	4,245	5000	4,369
500	3,351	700	3,588	900	3,754	4500	4,093	5500	4,247	6000	4,376
600	3,375	800	3,619	950	3,771	5000	4,094	6000	4,247	7000	4,380
700	3,387	900	3,640	1000	3,787	5500	4,094	6500	4,248	8000	4,381
800	3,394	1000	3,655	1200	3,833			7000	4,248	9000	4,382
900	3,397	1200	3,672	1400	3,852			7500	4,248	10000	4,382
1000	3,399	1400	3,681	1600	3,881			8000	4,248	11000	4,382
1200	3,401	1600	3,685	1800	3,892						
1400	3,401	1800	3,687	2000	3,900						
		2000	3,688	2200	3,904						
		2500	3,689	2400	3,907						
				2600	3,909						
				2800	3,910						

TABLA VI (Continuación).

r_{eD} = 90		r_{eD} = 100		r_{eD} = 200		r_{eD} = 300		r_{eD} = 400		r_{eD} = 500	
t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$
800	3,747	1000	3,859	1500	4,061	6000	4,754	15000	5,212	20000	5,356
900	3,806	1200	3,949	2000	4,205	8000	4,898	20000	5,356	25000	5,468
1000	3,858	1400	4,026	2500	4,317	10000	5,010	30000	5,556	30000	5,559
1200	3,949	1600	4,092	3000	4,408	12000	5,101	40000	5,689	35000	5,636
1300	3,988	1800	4,150	3500	4,485	14000	5,177	50000	5,781	40000	5,702
1400	4,025	2000	4,200	4000	4,552	16000	5,242	60000	5,845	45000	5,759
1500	4,058	2500	4,303	5000	4,663	18000	5,299	70000	5,889	50000	5,810
1800	4,144	3000	4,379	6000	4,754	20000	5,348	80000	5,920	60000	5,894
2000	4,192	3500	4,434	7000	4,829	24000	5,429	90000	5,942	70000	5,960
2500	4,285	4000	4,478	8000	4,894	28000	5,491	100000	5,957	80000	6,023
3000	4,349	4500	4,510	9000	4,949	30000	5,517	110000	5,967	90000	6,055
3500	4,394	5000	4,534	10000	4,996	40000	5,606	120000	5,975	100000	6,086
4000	4,426	5500	4,552	12000	5,072	50000	5,652	125000	5,977	120000	6,135
4500	4,448	6000	4,565	14000	5,129	60000	5,675	130000	5,980	140000	6,164
5000	4,464	6500	4,579	16000	5,171	70000	5,690	140000	5,983	160000	6,183
6000	4,482	7000	4,583	18000	5,203	80000	5,696	160000	5,988	180000	6,195
7000	4,491	7500	4,588	20000	5,227	90000	5,700	180000	5,990	200000	6,202
8000	4,496	8000	4,593	25000	5,264	100000	5,702	200000	5,991	250000	6,211
9000	4,498	9000	4,598	30000	5,282	120000	5,703	240000	5,991	300000	6,213
10000	4,499	10000	4,601	35000	5,290	140000	5,704	260000	5,991	350000	6,214
11000	4,499	12500	4,604	40000	5,294	150000	5,704			400000	6,214
12000	4,500	15000	4,605								
14000	4,500										

TABLA VI (Continuación).

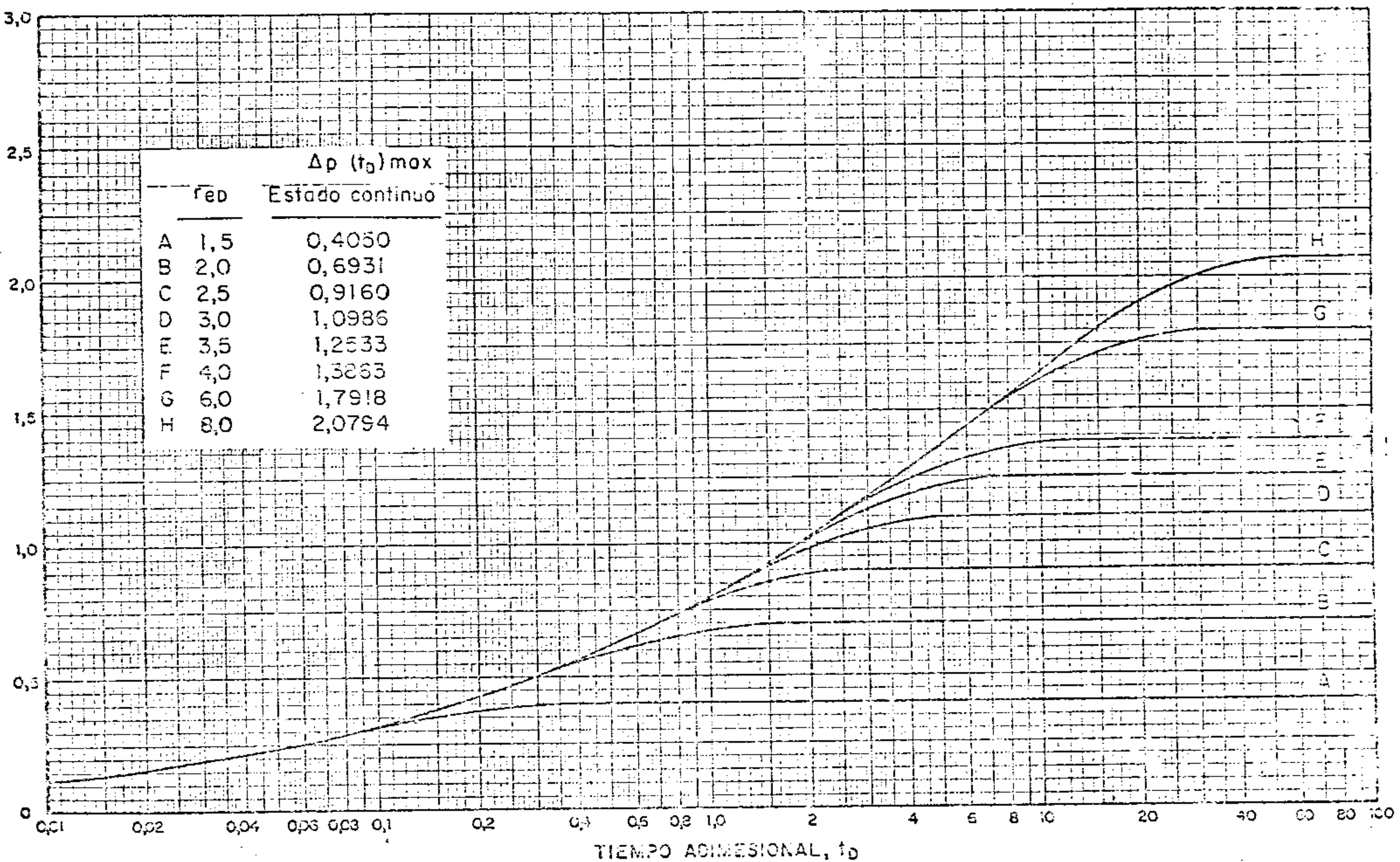
$r_{eD} = 600$		$r_{eD} = 700$		$r_{eD} = 800$		$r_{eD} = 900$		$r_{eD} = 1000$	
t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$
$4,0 \times 10^4$	5,703	$5,0 \times 10^4$	5,814	$7,0 \times 10^4$	5,983	$8,0 \times 10^4$	6,049	$1,0 \times 10^5$	6,161
4,5 "	5,752	6,0 "	5,905	8,0 "	6,049	9,0 "	6,108	1,2 "	6,252
5,0 "	5,814	7,0 "	5,932	9,0 "	6,108	10,0 "	6,151	1,4 "	6,329
6,0 "	5,904	8,0 "	6,048	10,0 "	6,169	12,0 "	6,251	1,6 "	6,395
7,0 "	5,979	9,0 "	6,105	12,0 "	6,249	14,0 "	6,327	1,8 "	6,432
8,0 "	6,041	10,0 "	6,156	14,0 "	6,322	16,0 "	6,392	2,0 "	6,503
9,0 "	6,094	12,0 "	6,239	16,0 "	6,382	18,0 "	6,447	2,5 "	6,605
10,0 "	6,139	14,0 "	6,305	18,0 "	6,432	20,0 "	6,434	3,0 "	6,581
12,0 "	6,210	16,0 "	6,357	20,0 "	6,474	25,0 "	6,587	3,5 "	6,372
14,0 "	6,262	18,0 "	6,398	25,0 "	6,551	30,0 "	6,652	4,0 "	6,781
16,0 "	6,299	20,0 "	6,430	30,0 "	6,599	40,0 "	6,729	4,5 "	6,813
18,0 "	6,326	25,0 "	6,484	35,0 "	6,630	45,0 "	6,751	5,0 "	6,837
20,0 "	6,345	30,0 "	6,514	40,0 "	6,650	50,0 "	6,766	5,5 "	6,854
25,0 "	6,374	35,0 "	6,530	45,0 "	6,663	55,0 "	6,777	6,0 "	6,868
30,0 "	6,337	40,0 "	6,540	50,0 "	6,671	60,0 "	6,785	7,0 "	6,885
35,0 "	6,392	45,0 "	6,545	55,0 "	6,676	70,0 "	6,794	8,0 "	6,895
40,0 "	6,395	50,0 "	6,548	60,0 "	6,679	80,0 "	6,798	9,0 "	6,901
50,0 "	6,397	60,0 "	6,550	70,0 "	6,682	90,0 "	6,800	10,0 "	6,904
60,0 "	6,397	70,0 "	6,551	80,0 "	6,684	$10,0 \times 10^5$	6,801	12,0 "	6,907
		80,0 "	6,551	100,0 "	6,684			14,0 "	6,907
								16,0 "	6,908

TABLA VI (Continuación).

r_{eD} = 1200		r_{eD} = 1400		r_{eD} = 1600		r_{eD} = 1800		r_{eD} = 2000	
t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$
2,0x10^5	6,507	2,0x10^5	6,507	2,5x10^5	6,619	3,0x10^5	6,710	4,0x10^5	6,854
3,0 "	6,704	2,5 "	6,619	3,0 "	6,710	4,0 "	6,854	5,0 "	6,996
4,0 "	6,833	3,0 "	6,709	3,5 "	6,787	5,0 "	6,965	6,0 "	7,056
5,0 "	6,913	3,5 "	6,785	4,0 "	6,853	6,0 "	7,054	7,0 "	7,132
6,0 "	6,975	4,0 "	6,849	5,0 "	6,962	7,0 "	7,120	8,0 "	7,196
7,0 "	7,013	5,0 "	6,950	6,0 "	7,046	8,0 "	7,183	9,0 "	7,251
8,0 "	7,038	6,0 "	7,026	7,0 "	7,114	9,0 "	7,233	10,0 "	7,298
9,0 "	7,056	7,0 "	7,082	8,0 "	7,167	10,0 "	7,280	12,0 "	7,374
10,0 "	7,067	8,0 "	7,123	9,0 "	7,210	15,0 "	7,407	14,0 "	7,431
12,0 "	7,080	9,0 "	7,154	10,0 "	7,244	20,0 "	7,459	16,0 "	7,474
14,0 "	7,085	10,0 "	7,177	15,0 "	7,334	30,0 "	7,489	18,0 "	7,506
16,0 "	7,088	15,0 "	7,229	20,0 "	7,364	40,0 "	7,495	20,0 "	7,530
18,0 "	7,089	20,0 "	7,241	25,0 "	7,373	50,0 "	7,495	25,0 "	7,566
19,0 "	7,089	25,0 "	7,243	30,0 "	7,376	51,0 "	7,495	30,0 "	7,584
20,0 "	7,090	30,0 "	7,244	35,0 "	7,377	52,0 "	7,495	35,0 "	7,593
21,0 "	7,090	31,0 "	7,244	40,0 "	7,378	53,0 "	7,495	40,0 "	7,597
22,0 "	7,090	32,0 "	7,244	42,0 "	7,378	54,0 "	7,495	50,0 "	7,600
23,0 "	7,090	33,0 "	7,244	44,0 "	7,378	56,0 "	7,495	60,0 "	7,601
24,0 "	7,090							64,0 "	7,601

TABLA VI (Continuación)

r_{eD} = 2200		r_{eD} = 2400		r_{eD} = 2600		r_{eD} = 2800		r_{eD} = 3000	
t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$	t_D	$\Delta p(t_D)$
$5,0x10^5$	6,966	$6,0x10^5$	7,057	$7,0x10^5$	7,134	$8,0x10^5$	7,201	$1,0x10^5$	7,312
5,5 "	7,013	7,0 "	7,134	8,0 "	7,201	9,0 "	7,260	1,2 "	7,403
6,0 "	7,057	8,0 "	7,200	9,0 "	7,259	10,0 "	7,312	1,4 "	7,460
6,5 "	7,097	9,0 "	7,259	10,0 "	7,312	12,0 "	7,403	1,6 "	7,545
7,0 "	7,133	10,0 "	7,310	12,0 "	7,401	16,0 "	7,542	1,8 "	7,602
7,5 "	7,167	12,0 "	7,398	14,0 "	7,475	20,0 "	7,644	2,0 "	7,651
8,0 "	7,199	16,0 "	7,526	16,0 "	7,536	24,0 "	7,719	2,4 "	7,732
8,5 "	7,229	20,0 "	7,611	18,0 "	7,586	28,0 "	7,775	2,8 "	7,794
9,0 "	7,256	24,0 "	7,668	20,0 "	7,631	30,0 "	7,797	3,0 "	7.820
10,0 "	7,307	28,0 "	7,706	24,0 "	7,690	35,0 "	7,840	3,5 "	7,871
12,0 "	7,390	30,0 "	7.720	28,0 "	7,746	40,0 "	7.870	4,0 "	7,908
16,0 "	7,507	35,0 "	7.745	30,0 "	7,765	50,0 "	7,905	4,5 "	7,935
20,0 "	7,579	40,0 "	7,760	35,0 "	7,799	60,0 "	7,922	5,0 "	7,955
25,0 "	7,631	50,0 "	7,775	40,0 "	7,821	70,0 "	7,930	6,0 "	7,979
30,0 "	7,661	60,0 "	7,780	50,0 "	7,845	80,0 "	7,934	7,0 "	7,992
35,0 "	7.677	70,0 "	7,782	60,0 "	7,856	90,0 "	7,936	8,0 "	7,999
40,0 "	7,686	80,0 "	7,783	70,0 "	7,860	$10,0x10^6$	7,937	9,0 "	8,002
50,0 "	7,693	90,0 "	7,783	80,0 "	7,862	12,0 "	7,937	10,0 "	8,004
60,0 "	7,695	95,0 "	7,783	90,0 "	7,863	13,0 "	7,937	12,0 "	8,005
70,0 "	7,696			$10,0x10^6$	7,863			15,0 "	8,006
80,0 "	7,696								



	reD	Δp (tD) max Estado continuo
A	1,5	0,4050
B	2,0	0,6931
C	2,5	0,9160
D	3,0	1,0986
E	3,5	1,2533
F	4,0	1,3863
G	6,0	1,7918
H	8,0	2,0794

Fig. 31– Cambio de presión adimensional como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito). Rata de producción (intrusión) constante y presión constante en el límite exterior. Radio adimensional de 1,5 a 8,0. (Refers 7 y 8).

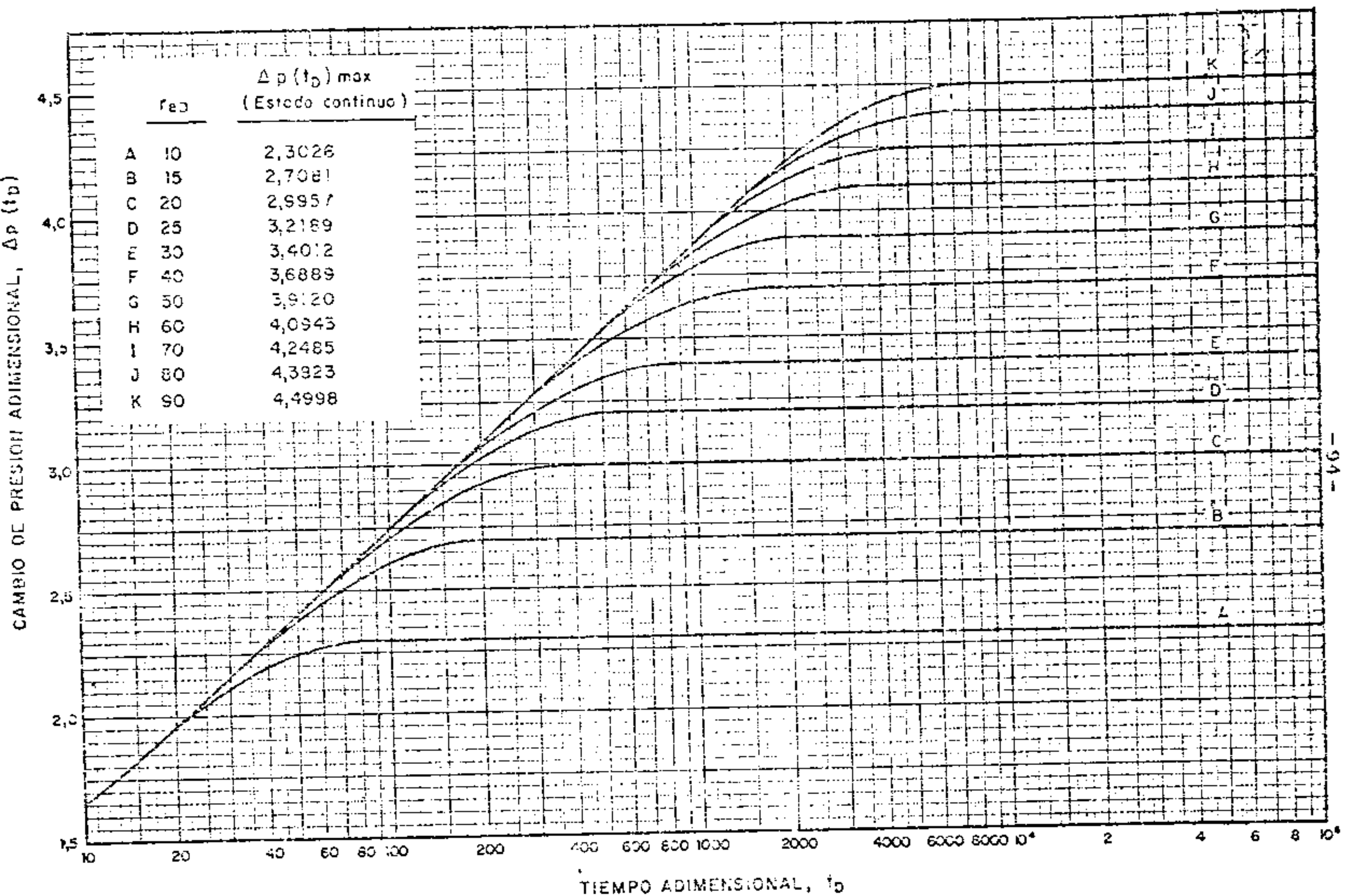


Fig. 32-Cambio de presión adimensional como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito), rata de producción (intrusión) constante y presión constante en el límite exterior. Radio adimensional de 10 a 90. (Refers. 7 y 8).

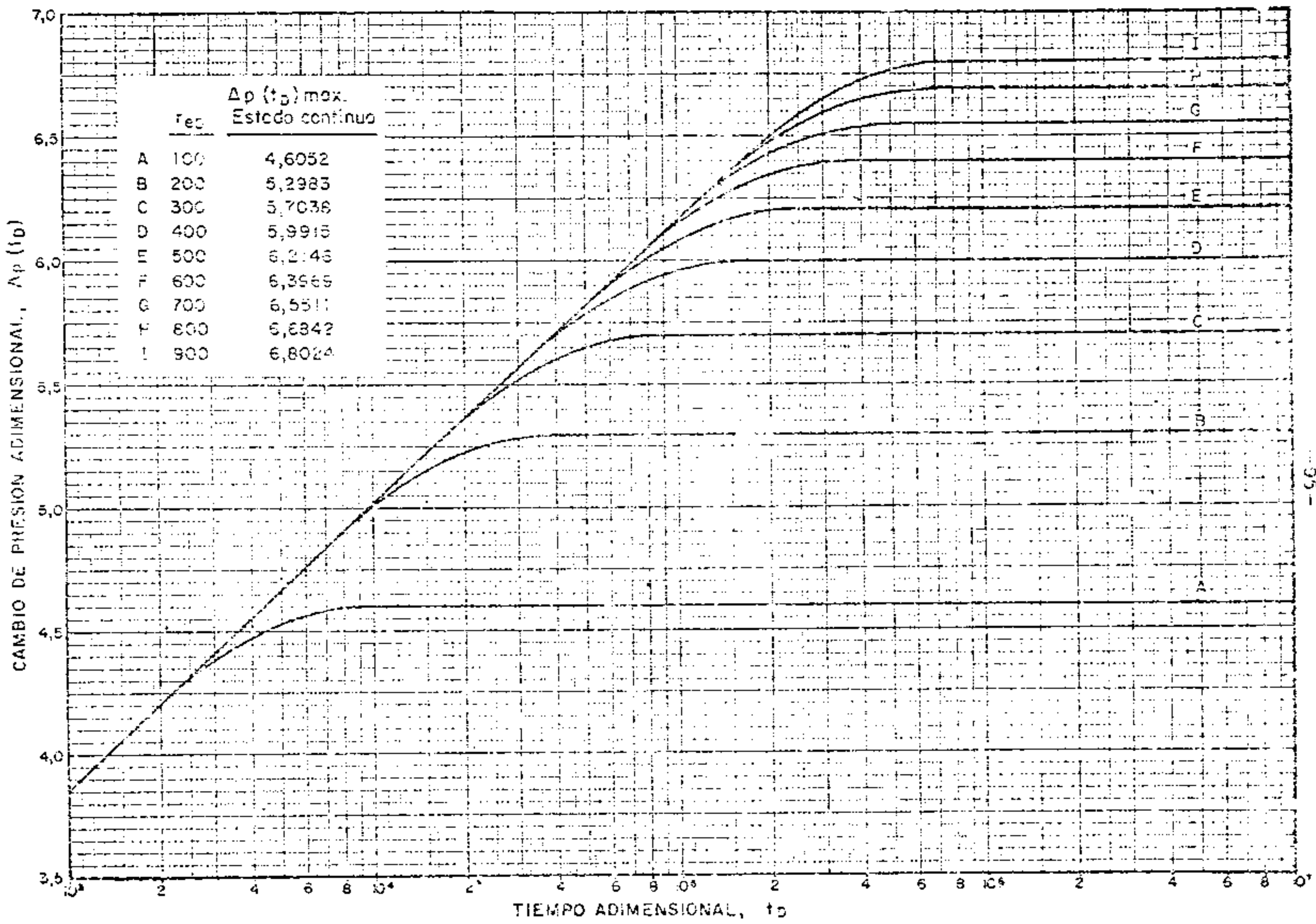
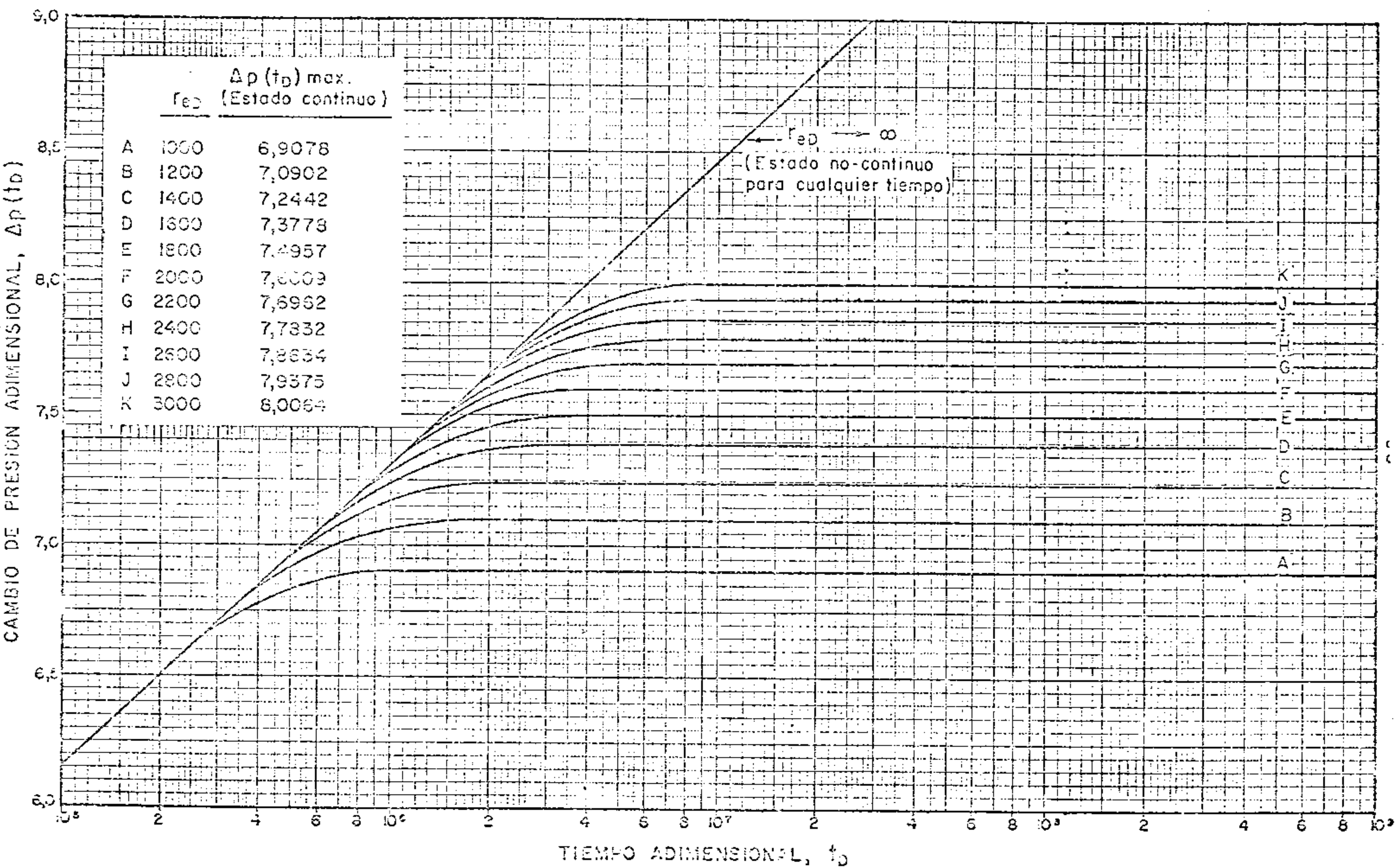


Fig. 33-Cambio de presión adimensional como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito), rata de producción (intrusión) constante y presión constante en el límite exterior. Radio adimensional de 100 a 900. (Refers. 7 y 8).



	r_{eD}	$\Delta p(t_D)$ max. (Estado continuo)
A	1000	6,9078
B	1200	7,0902
C	1400	7,2442
D	1600	7,3778
E	1800	7,4957
F	2000	7,6009
G	2200	7,6962
H	2400	7,7832
I	2600	7,8634
J	2800	7,9375
K	3000	8,0064

Fig. 34–Cambio de presión adimensional como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito), rata de producción (intrusión) constante y presión constante en el límite exterior. Radio adimensional de 1000 a 3000 (Refers 7 y 8).

$$W(R_i,t) = W_e = 1{,}119\ \phi\ c\ h\ R_i^2\ \frac{\theta^\circ}{360^\circ} Q(t_D) \tag{69}$$

donde,

$$Q(t_D) = Q(1,t_D) = \frac{(r_{eD})^2 - 1}{2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a_n^2 t_D}\ J_1^2(a_n\ r_{eD})}{a_n^2\left[J_o^2\ (a_n) - J_1^2(a_n\ r_{eD})\right]} \tag{70}$$

donde a_n son las raíces de la eucación,

$$J_1(a_n\ r_{eD})\ Y_o(a_n) - Y_1(a_n\ r_{eD})\ J_o(a_n) = 0 \tag{71}$$

Si $t_D < 0{,}01$: Usar la Ec.(52) para calcular $Q(t_D)$.

Si $t_D \geq 0{,}5(r_{eD})^2$, ocurre flujo contínuo, es decir, el valor de $Q(t_D)$ es máximo y toma un valor constante calculado por,

$$Q(t_D) = \frac{(r_{eD})^2 - 1}{2} \tag{72}$$

Los valores de $Q(t_D)$ son dados por vEH[7], para r_{eD} entre 1,5 y 10 y en la Referencia 31 para r_{eD} entre 20 y 10^6. Los resultados se representan en la Tabla VII y Figs.35 a 46.

Caso 6 - Presión constante en el límite interior (contacto agua-petróleo) lo mismo que en el límite exterior. Analíticamente, las condiciones de límite son:

a) Igual a la Condición a) del Caso 2

b) Igual a la Condición b) del Caso 4.

Este caso fué resuelto por Mueller[21] y permite el cálculo del fluido total que pasa por el límite interior ($r_D = 1$) en un tiempo dado t, usando la Ec.(51), donde el valor de $Q(t_D)$ fue calculado por computado

TABLA VII - Valores de Intrusión Adimensional, $Q(t_D)$, como Función de Tiempo Adimensional, t_D, para Valores de r_{eD} entre 1,5 y 10^6. Caso 5: Acuífero (yacimiento) Radial Limitado (Finito). Presión en el Límite Interior Constante y Rata de Producción en el Límite Exterior Igual a Cero (Acuifero Cerrado). Valores de r_{eD} entre 1,5 y 10, Fc. (70), Referencia 7 y 8; los demás Valores, Referencia 31. Figs. 35 a 46.

r_{eD} = 1,5		r_{eD} = 2,0		r_{eD} = 2,5		r_{eD} = 3,0	
t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$
0,050	0,276	0,050	0,278	0,10	0,408	0,30	0,755
0,060	0,304	0,075	0,345	0,15	0,509	0,40	0,895
0,070	0,330	0,100	0,404	0,20	0,599	0,50	1,023
0,080	0,354	0,125	0,458	0,25	0,681	0,60	1,143
0,090	0,375	0,150	0,507	0,30	0,758	0,70	1,256
0,10	0,395	0,175	0,553	0,35	0,829	0,80	1,363
0,11	0,414	0,200	0,597	0,40	0,897	0,90	1,465
0,12	0,431	0,225	0,638	0,45	0,962	0,100	1,563
0,13	0,446	0,250	0,678	0,50	1,024	0,125	1,791
0,14	0,461	0,275	0,715	0,55	1,083	0,150	1,997
0,15	0,474	0,300	0,751	0,60	1,140	0,175	2,184
0,16	0,486	0,325	0,785	0,65	1,195	0,200	2,353
0,17	0,497	0,350	0,817	0,70	1,248	0,225	2,507
0,18	0,507	0,375	0,848	0,75	1,229	0,250	2,646
0,19	0,517	0,400	0,877	0,80	1,348	0,275	2,772
0,20	0,525	0,425	0,905	0,85	1,395	0,300	2,886
0,21	0,533	0,450	0,932	0,90	1,440	0,325	2,990
0,22	0,541	0,475	0,958	0,95	1,484	0,350	3,084
0,23	0,548	0,500	0,983	0,10	1,526	0,375	3,170
0,24	0,554	0,550	1,028	0,11	1,605	0,400	3,247
0,25	0,559	0,600	1,070	0,12	1,679	0,425	3,317
0,26	0,565	0,650	1,108	0,13	1,747	0,450	3,381
0,28	0,574	0,700	1,143	0,14	1,811	0,475	3,439
0,30	0,582	0,750	1,174	0,15	1,870	0,500	3,491
0,32	0,588	0,800	1,203	0,16	1,924	0,550	3,581
0,34	0,594	0,900	1,253	0,17	1,975	0,600	3,656
0,36	0,599	0,100	1,295	0,18	2,022	0,650	3,717
0,38	0,603	0,11	1,330	0,20	2,106	0,700	3,767
0,40	0,606	0,12	1,358	0,22	2,178	0,750	3,809
0,45	0,613	0,13	1,382	0,24	2,241	0,800	3,843
0,50	0,617	0,14	1,402	0,26	2,294	0,900	3,894
0,60	0,621	0,16	1,432	0,28	2,340	0,100	3,928
0,70	0,623	0,17	1,444	0,30	2,380	0,110	3,951
0,80	0,624	0,18	1,453	0,34	2,244	0,120	3,967
		0,20	1,468	0,38	2,491	0,140	3,985
		0,25	1,487	0,42	2,525	0,160	3,993
		0,30	1,495	0,46	2,551	0,180	3,997
		0,40	1,499	0,50	2,570	0,200	3,999
		0,50	1,500	0,60	2,599	0,220	3,999
				0,70	2,613	0,240	4,000
				0,80	2,619		
				0,90	2,622		
				0,10	2,624		

TABLA VII (Continuación).

r_{eD} = 3,5		r_{eD} = 4,0		r_{eD} = 4,5		r_{eD} = 5,0	
t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$
1,00	1,571	2,00	2,442	2,5	2,835	3,0	3,195
1,20	1,761	2,20	2,598	3,0	3,196	3,5	3,542
1,40	1,940	2,40	2,748	3,5	3,537	4,0	3,875
1,60	2,111	2,60	2,893	4,0	3,859	4,5	4,193
1,80	2,273	2,80	3,034	4,5	4,165	5,0	4,499
2,00	2,427	3,00	3,170	5,0	4,454	5,5	4,792
2,20	2,574	3,25	3,334	5,5	4,727	6,0	5,074
2,40	2,715	3,50	3,493	6,0	4,986	6,5	5,345
2,60	2,849	3,75	3,645	6,5	5,231	7,0	5,605
2,80	2,976	4,00	3,792	7,0	5,464	7,5	5,854
3,00	3,098	4,25	3,932	7,5	5,684	8,0	6,094
3,25	3,242	4,50	4,068	8,0	5,892	8,5	6,325
3,50	3,379	4,75	4,198	8,5	6,089	9,0	6,547
3,75	3,507	5,00	4,323	9,0	6,276	9,5	6,750
4,00	3,628	5,50	4,560	9,5	6,453	10	6,965
4,25	3,742	6,00	4,779	10	6,621	11	7,350
4,50	3,850	6,50	4,982	11	6,930	12	7,706
4,75	3,951	7,00	5,169	12	7,208	13	8,035
5,00	4,047	7,50	5,343	13	7,457	14	8,339
5,50	4,222	8,00	5,504	14	7,680	15	8,620
6,00	4,378	8,50	5,653	15	7,880	16	8,879
6,50	4,516	9,00	5,790	16	8,060	18	9,338
7,00	4,639	9,50	5,917	18	8,365	20	9,371
7,50	4,749	10	6,035	20	8,611	22	10,07
8,00	4,846	11	6,246	22	8,809	24	10,35
8,50	4,932	12	6,425	24	8,968	26	10,59
9,00	5,009	13	6,580	26	9,097	28	10,80
9,50	5,078	14	6,712	28	9,200	30	10,98
10,00	5,138	15	6,825	30	9,283	34	11,26
11	5,241	16	6,922	34	9,404	38	11,46
12	5,321	17	7,004	38	9,461	42	11,61
13	5,385	18	7,076	42	9,532	45	11,71
14	5,435	20	7,189	46	9,565	50	11,79
15	5,476	22	7,272	50	9,596	60	11,91
16	5,506	24	7,332	60	9,617	70	11,96
17	5,531	26	7,377	70	9,621	80	11,98
18	5,551	30	7,434	80	9,623	90	11,99
20	5,579	34	7,464	90	9,624	100	12,00
25	5,611	38	7,481	100	9,625	120	12,0
30	5,621	42	7,490				
35	5,624	46	7,494				
40	5,625	50	7,497				

TABLA VII (Continuación).

$r_{eD} = 6$		$r_{eD} = 7$		$r_{eD} = 8$		$r_{eD} = 9$	
t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$
6,0	5,148	9,0	6,861	9	6,861	10	7,417
6,5	5,440	9,5	7,127	10	7,398	15	9,945
7,0	5,724	10	7,389	11	7,920	20	12,26
7,5	6,002	11	7,902	12	8,431	22	13,13
8,0	6,273	12	8,397	13	8,930	24	13,98
8,5	6,537	13	8,876	14	9,418	26	14,79
9,0	6,795	14	9,341	15	9,895	28	15,59
9,5	7,047	15	9,791	16	10,361	30	16,35
10,0	7,293	16	10,23	17	10,82	32	17,10
10,5	7,533	17	10,65	18	11,26	34	17,82
11	7,767	18	11,06	19	11,70	36	18,52
12	8,220	19	11,46	20	12,13	38	19,19
13	8,651	20	11,85	22	12,95	40	19,85
14	9,063	22	12,58	24	13,74	42	20,48
15	9,456	24	13,27	26	14,50	44	21,09
16	9,829	26	13,92	28	15,23	46	21,69
17	10,19	28	14,53	30	15,92	48	22,26
18	10,53	30	15,11	34	17,22	50	22,82
19	10,85	35	16,30	38	18,41	52	23,36
20	11,16	38	18,41	40	18,97	54	23,89
22	11,74	45	18,43	45	20,26	56	24,39
24	12,26	50	19,24	50	21,42	58	24,88
25	12,50	60	20,51	55	22,46	60	25,36
31	13,74	70	21,45	60	23,40	65	26,48
35	14,40	80	22,13	70	24,98	70	27,52
39	14,93	90	22,63	80	26,26	75	28,48
51	16,05	100	23,00	90	27,28	80	29,36
60	16,56	120	23,47	100	28,11	85	30,18
70	16,91	140	23,71	120	29,31	90	30,93
80	17,14	160	23,85	140	30,08	95	31,63
90	17,27	180	23,92	160	30,58	100	32,27
100	17,35	200	23,96	180	30,91	120	34,39
110	17,41	500	24,00	200	31,12	140	35,92
120	17,45			240	31,34	160	37,04
130	17,46			280	31,43	180	37,85
140	17,48			320	31,47	200	38,44
150	17,49			360	31,49	240	39,17
160	17,49			400	31,50	280	39,56
180	17,50			500	31,50	320	39,77
200	17,50					360	39,88
220	17,50					400	39,94
						440	39,97
						480	39,98

TABLA VII (Continuación).

$r_{eD} = 10$		$r_{eD} = 20$		$r_{eD} = 50$		$r_{eD} = 100$	
t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$
15	9,965	100	42,91	600	139	2000	532
20	12,32	130	52,76	800	241	3000	757
22	13,22	160	61,98	1000	290	4000	969
24	14,09	200	73,38	1300	359	5000	1171
26	14,95	240	83,83	1600	423	6000	1363
28	15,78	300	97,91	2000	502	8000	1718
30	16,59	400	117,7	2400	573	10000	2008
32	17,38	500	133,6	3000	667	13000	2460
34	18,16	600	146,4	4000	795	16000	2820
36	18,91	700	156,7	5000	895	20000	3230
38	19,65	800	165,1	6000	974	24000	3560
40	20,37	1000	177,1	8000	1082	30000	3940
42	21,07	1300	187,8	10000	1148	40000	4370
44	21,76	1600	193,4	13000	1201	50000	4620
46	22,42	2000	196,9	16000	1227	60000	4770
48	23,07	3000	199,2	20000	1241	80000	4920
50	23,71			24000	1246	100000	4970
52	24,33			30000	1249	110000	4980
54	24,94						
56	25,53						
58	26,11						
60	26,67						
65	28,02						
70	29,29						
75	30,49						
80	31,61						
85	32,67						
90	33,66						
95	34,60						
100	35,48						
120	38,51						
140	40,89						
160	42,75						
180	44,21						
200	45,36						
240	46,95						
280	47,94						
320	48,54						
360	48,91						
400	49,14						
440	49,28						
480	49,35						

TABLA VII (Continuación).

$r_{eD} = 200$		$r_{eD} = 500$		$r_{eD} = 1000$		$r_{eD} = 2000$	
t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$
10000	2190	100000	17500	3×10^{4}	5890	4×10^{5}	62700
13000	2770	130000	22100	4 x "	7640	5 x "	77000
16000	3330	160000	26500	5 x "	9350	6 x "	91100
20000	4040	200000	32100	1×10^{5}	17600	7 x "	105000
24000	4720	240000	37300	2 x "	33200	8 x "	119000
30000	5690	300000	44700	3 x "	48000	9 x "	133000
40000	7170	400000	55600	4 x "	62400	1×10^{6}	146000
50000	8500	500000	65000	5 x "	76400	1,3x "	186000
60000	9680	600000	73100	6 x "	89300	1,6x "	225000
80000	11700	800000	86200	7 x "	103000	2 x "	276000
100000	13300	1000000	96000	8 x "	116000	2,4x "	326000
130000	15200	1300000	106000	9 x "	128000	3 x "	397000
160000	16500	1600000	113000	1×10^{6}	140000	4 x "	510000
200000	17800	2000000	118000	1,4x "	183000	5 x "	614000
240000	18600	2400000	121000	2 x "	239000	7 x "	802000
300000	19200	3000000	123000	2,4x "	271000	1×10^{7}	1040000
400000	19700	4000000	125000	3 x "	311000	1,3x "	1230000
500000	19000	5000000	125000	4 x "	363000	1,7x "	1420000
				5 x "	401000	2 x "	1530000
				7 x "	448000	2,4x "	1650000
				8,4x "	467000	3 x "	1780000
				1×10^{7}	480000	4 x "	1890000
				1,4x "	495000	5 x "	1950000
				2 x "	499000	7 x "	1990000
				3 x "	500000	1×10^{8}	2000000
						1,3x "	2000000

TABLA VII (Continuación).

r_{eD} = 4000		r_{eD} = 10000		r_{eD} = 25000	
t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$
$1,6\times10^{6}$	$2,26\times10^{5}$	$3\ \times10^{6}$	$4,06\times10^{5}$	$6\ \times10^{7}$	$6,77\times10^{6}$
2 x "	2,78x "	4 x "	5,31x "	7 x "	7,83x "
2,4x "	3,30x "	5 x "	6,76x "	8 x "	8,86x "
3 x "	4,06x "	6 x "	7,76x "	9 x "	$9,93\times10^{7}$
4 x "	5,31x "	8 x "	1,02x "	$1\ \times10^{8}$	1,10x "
5 x "	6,54x "	$1\ \times10^{7}$	1,25x "	1,4x "	1,51x "
6 x "	7,74x "	1,2x "	1,49x "	2 x "	2,11x "
8 x "	$1,01\times10^{6}$	1,4x "	$1,72\times10^{6}$	2,6x "	2,70x "
$1\ \times10^{7}$	1,24x "	1,6x "	1,95x "	3 x "	3,09x "
1,2x "	1,46x "	1,8x "	2,17x "	3,3x "	3,37x "
1,4x "	1,67x "	2 x "	2,40x "	3,6x "	3,66x "
1,6x "	1,87x "	2,4x "	2,85x "	4 x "	4,03x "
1,3x "	2,07x "	3 x "	3,51x "	4,4x "	4,40x "
2 x "	2,27x "	4 x "	4,60x "	5 x "	4,94x "
2,3x "	2,54x "	5 x "	5,55x "	5,4x "	5,30x "
3 x "	3,14x "	7 x "	7,70x "	6 x "	5,82x "
4 x "	3,88x "	8 x "	8,69x "	6,4x "	6,17x "
5 x "	4,51x "	9 x "	9,65x "	7 x "	6,67x "
7 x "	5,49x "	$1\ \times10^{8}$	$1,06\times10^{7}$	7,4x "	7,01x "
8 x "	5,87x "	1,2x "	1,24x "	8 x "	7,50x "
9 x "	6,20x "	1,4x "	1,41x "	8,4x "	7,82x "
$1\ \times10^{8}$	6,47x "	1,7x "	1,66x "	9 x "	8,29x "
1,2x "	6,90x "	2 x "	1,89x "	$1\ \times10^{9}$	9,06x "
1,4x "	7,21x "	2,4x "	2,17x "	1,3x "	$1,12\times10^{8}$
1,7x "	7,52x "	3 x "	2,54x "	1,6x "	1,32x "
2 x "	7,71x "	4 x "	3,06x "	2 x "	1,55x "
2,3x "	7,82x "	5 x "	3,47x "	2,4x "	1,75x "
2,6x "	7,89x "	6 x "	3,79x "	3 x "	2,00x "
3 x "	7,94x "	7 x "	4,04x "	4 x "	2,33x "
4 x "	7,99x "	8 x "	4,24x "	5 x "	2,56x "
5 x "	8,00x "	$1\ \times10^{9}$	4,53x "	6 x "	2,72x "
		1,4x "	4,82x "	8 x "	2,92x "
		2 x "	4,96x "	$1\ \times10^{10}$	3,02x "
		3 x "	5,00x "	1,4x "	3,10x "
				2 x "	3,12x "
				3 x "	3,12x "

TABLA VII (Continuación).

r_{eD} = 100000		r_{eD} = 250000		r_{eD} = 1000000	
t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$	t_D	$Q(t_D)$
$3\ \times10^{8}$	$3,10\times10^{7}$	$5\ \times10^{9}$	$4,51\times10^{8}$	$1\ \times10^{11}$	$7,95\times10^{9}$
3,5x "	3,59x "	6 x "	5,37x "	1,3x "	$1,02\times10^{10}$
4 x "	4,07x "	7 x "	6,22x "	1,6x "	1,25x "
5 x "	5,03x "	8 x "	7,07x "	2 x "	1,55x "
6 x "	5,98x "	$1\ \times10^{10}$	8,75x "	2,4x "	1,84x "
7 x "	6,93x "	1,4x "	$1,21\times10^{9}$	3 x "	2,28x "
8 x "	7,87x "	2 x "	1,70x "	4 x "	3,01x "
8,4x "	8,24x "	3 x "	2,49x "	5 x "	3,72x "
9 x "	8,80x "	4 x "	3,27x "	6 x "	4,42x "
$1\ \times10^{9}$	9,73x "	4,4x "	3,58x "	7 x "	5,11x "
1,4x "	$1,34\times10^{8}$	4,7x "	3,80x "	8 x "	5,80x "
2 x "	1,88x "	5 x "	4,03x "	$1\ \times10^{12}$	7,13x "
3 x "	2,77x "	5,4x "	4,32x "	1,2x "	8,42x "
4 x "	3,64x "	6 x "	4,76x "	1,4x "	9,67x "
5 x "	4,49x "	7 x "	5,48x "	1,5x "	$1,03\times10^{1}$
6 x "	5,33x "	7,4x "	5,76x "		
7 x "	6,15x "	8 x "	6,17x "		
8 x "	6,95x "	8,4x "	6,42x "		
9 x "	7,75x "	9 x "	6,85x "		
$1\ \times10^{10}$	8,52x "	$1\ \times10^{11}$	7,51x "		
1,3x "	$1,08\times10^{9}$	1,1x "	8,15x "		
1,6x "	1,29x "	1,3x "	9,38x "		
2 x "	1,56x "	1,6x "	$1,11\times10^{10}$		
2,4x "	1,80x "	2 x "	1,32x "		
3 x "	2,14x "	2,4x "	1,51x "		
4 x "	2,62x "	3 x "	1,75x "		
5 x "	3,03x "	4 x "	2,08x "		
6 x "	3,36x "	5 x "	2,33x "		
7 x "	3,64x "	7 x "	2,67x "		
8 x "	3,87x "	$1\ \times10^{12}$	2,92x "		
9 x "	4,06x "	1,3x "	3,04x "		
$1\ \times10^{11}$	4,22x "	1,6x "	3,09x "		
1,3x "	4,55x "	2 x "	3,11x "		
1,6x "	4,74x "				
2 x "	4,88x "				
2,4x "	4,94x "				
3 x "	4,98x "				
3,4x "	4,99x "				
4 x	5,00x "				

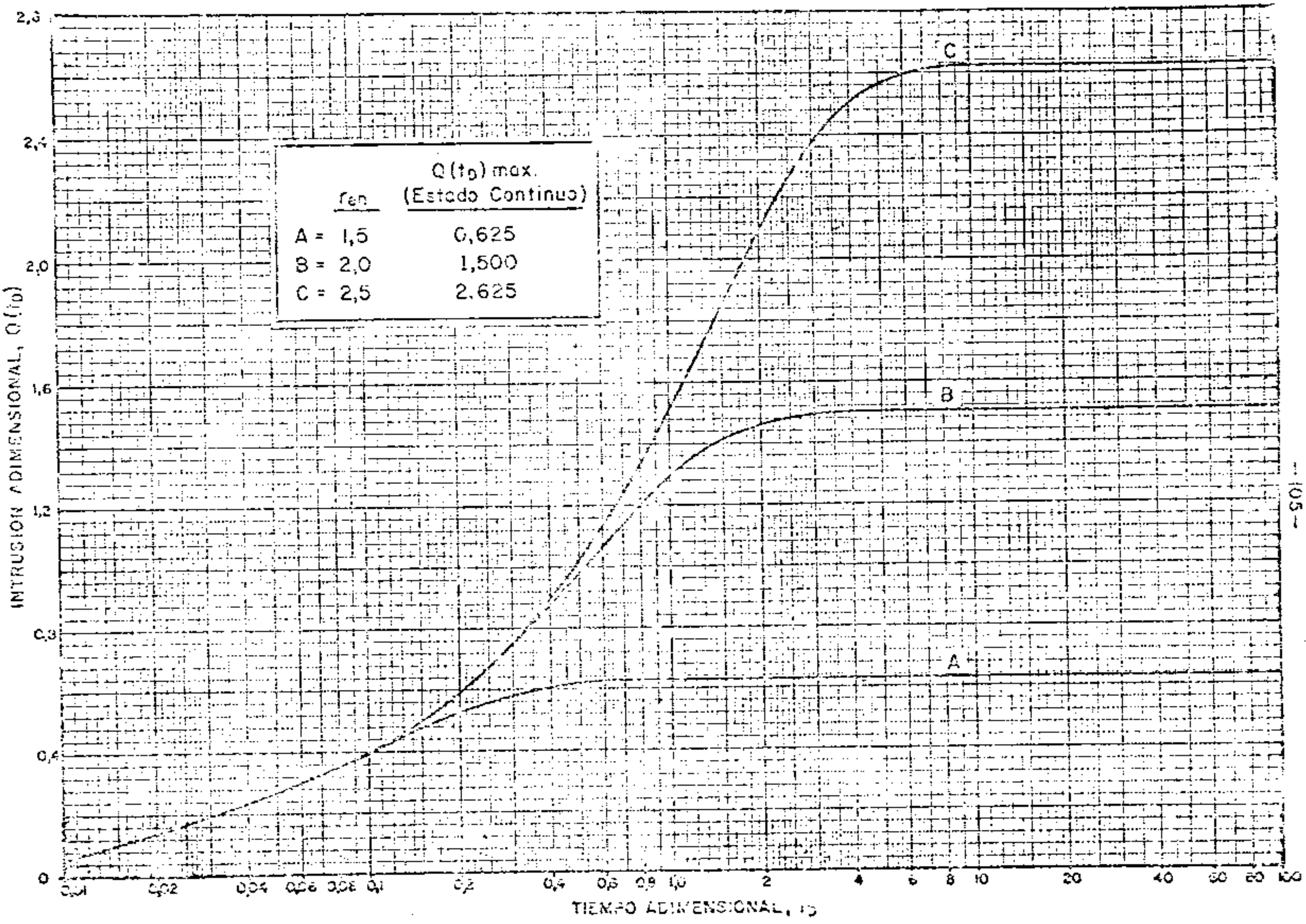


Fig. 35-Intrusión adimensional, $Q(t_D)$, como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito). Presión en el límite interior (contacto agua-petróleo) constante y rata de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado). Radio adimensional de 1,5 ; 2,0 y 2,5. (Referencias 7 y 8).

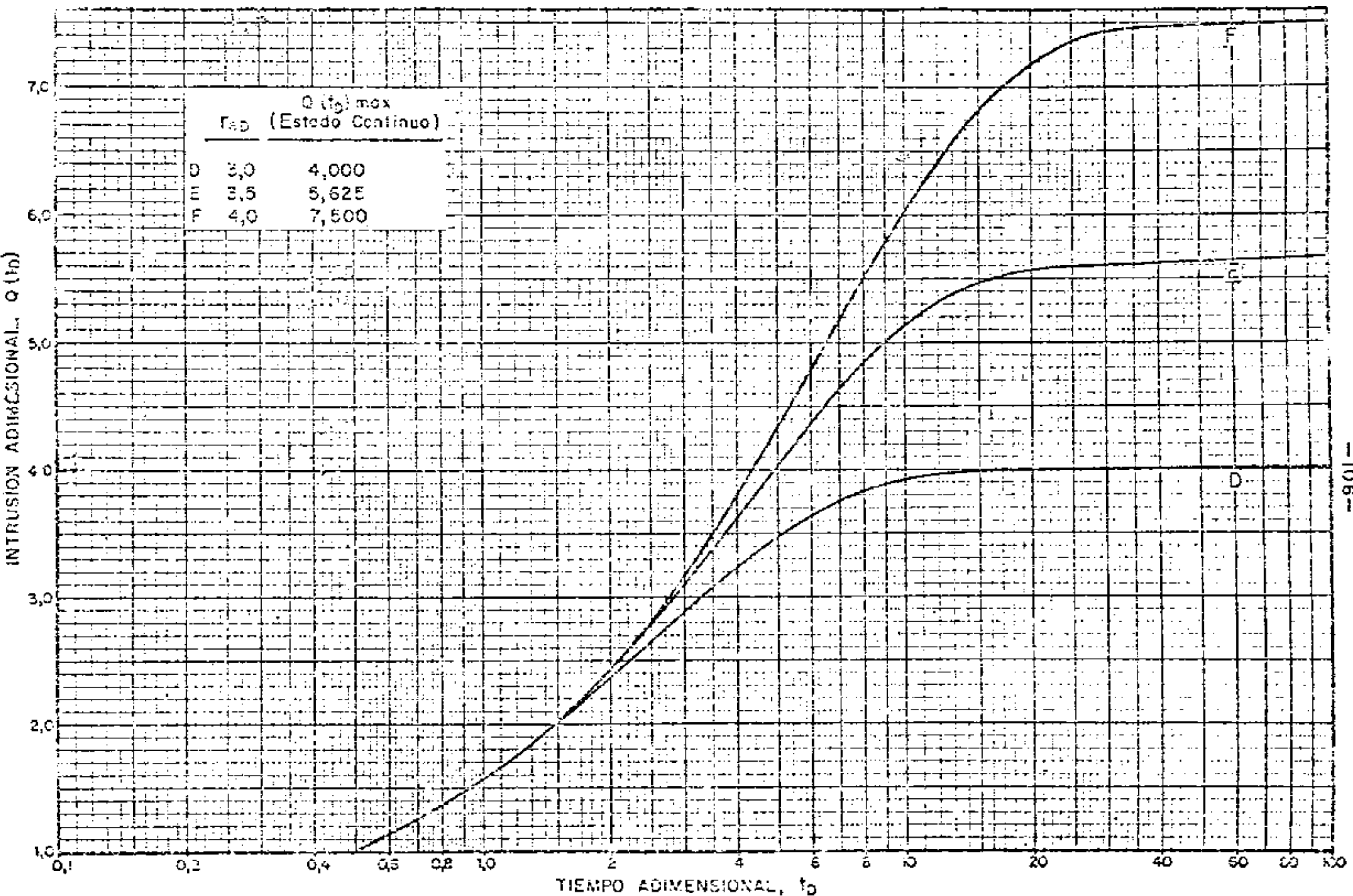


Fig. 36-Intrusión adimensional, $Q(t_D)$, como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito). Presión en el límite interior (contacto agua-petróleo) constante y rata de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado). Radio adimensional de 3,0 ; 3,5 y 4,0. (Referencias 7 y 8).

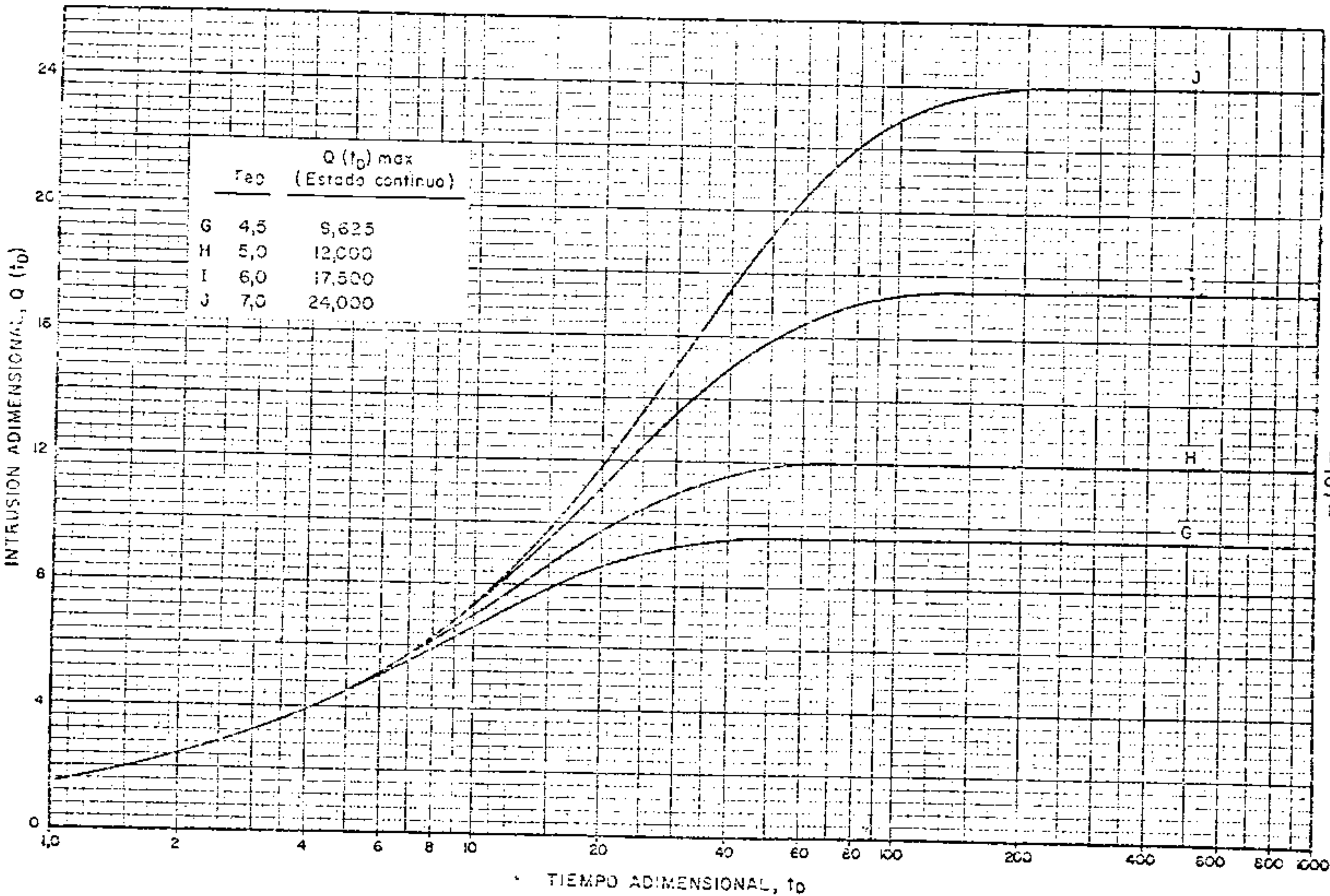


Fig. 37–Intrusión adimensional, $Q(t_D)$, como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito). Presión en el límite interior (contacto agua-petróleo) constante y rata de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado). Radio adimensional de 4,5; 5,0; 6,0 y 7,0. (Referencias 7 y 8).

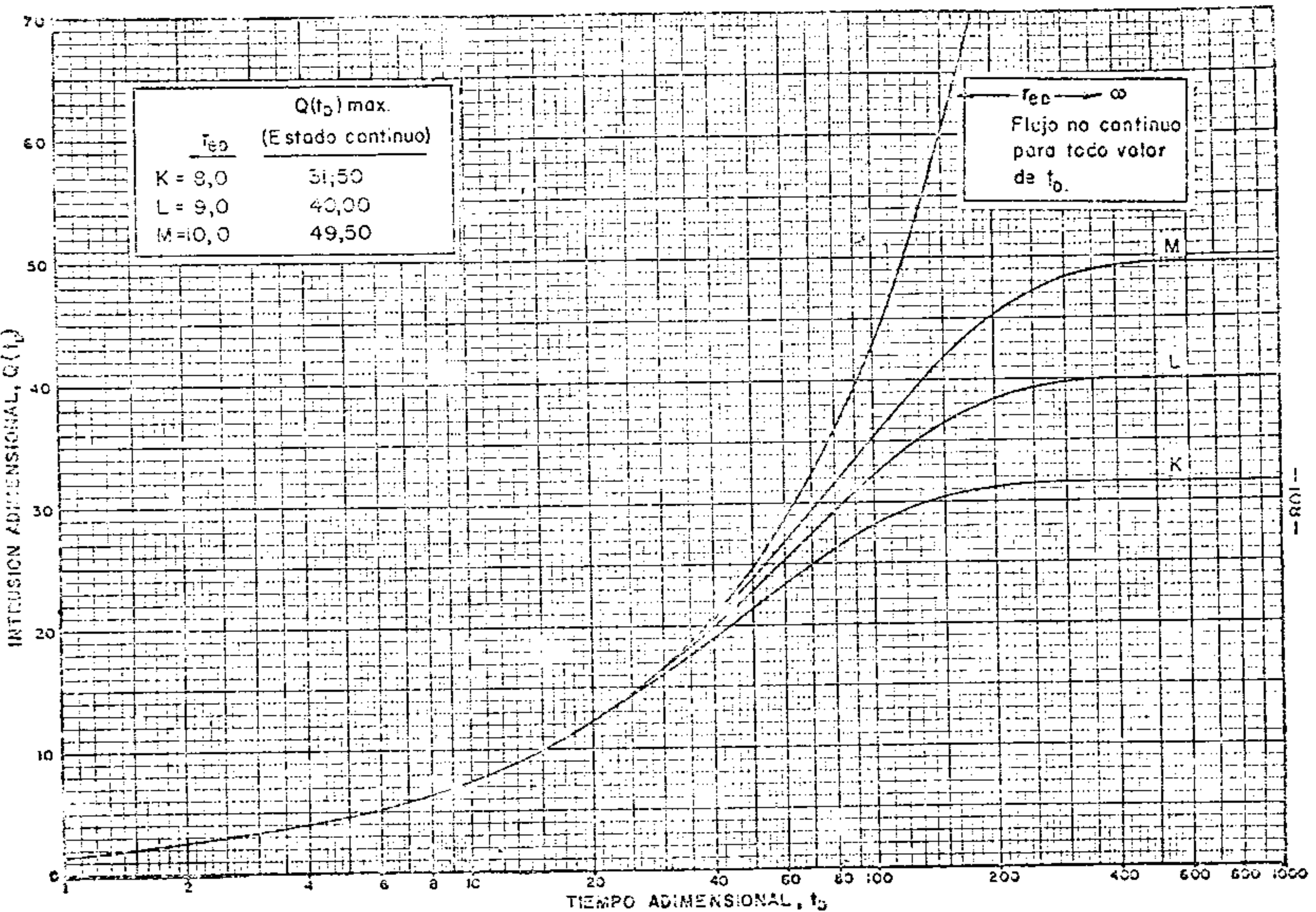


Fig. 53-Intrusión adimensional, Q(t_D), como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito). Presión en el límite interior (contacto agua-petróleo) constante y rata de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado). Radio adimensional de 8,0; 9,0; 10,0; ∞. (Referencias 7 y 8).

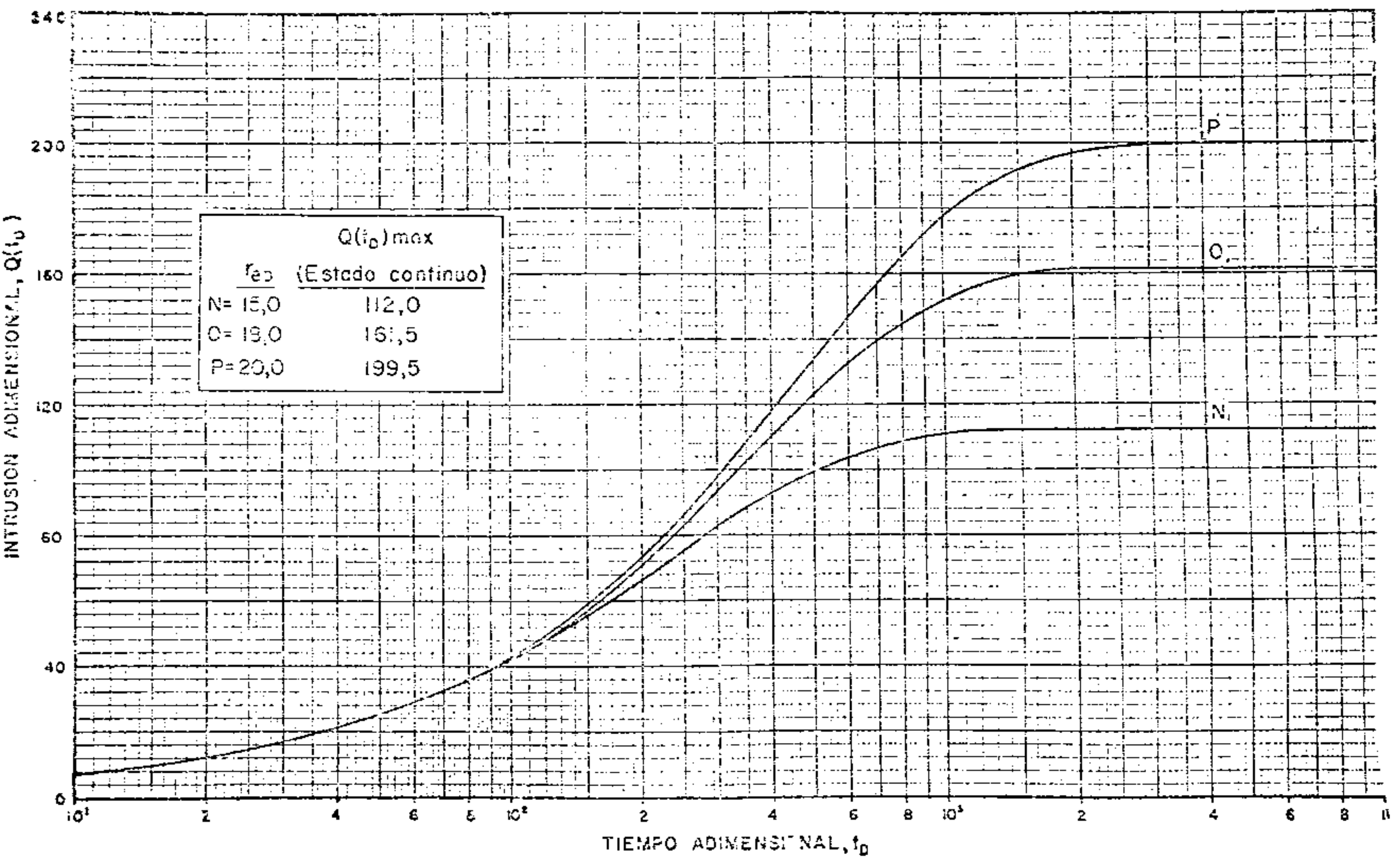


Fig. 39-Intrusión adimensional, $Q(t_D)$, como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito). Presión en el límite interior (contacto agua-petróleo) constante y rata de flujo igual a cero en el límite exterior (límit exterior cerrado). Radio adimensional de 15,0; 18,0 y 20,0 (Referencic 31).

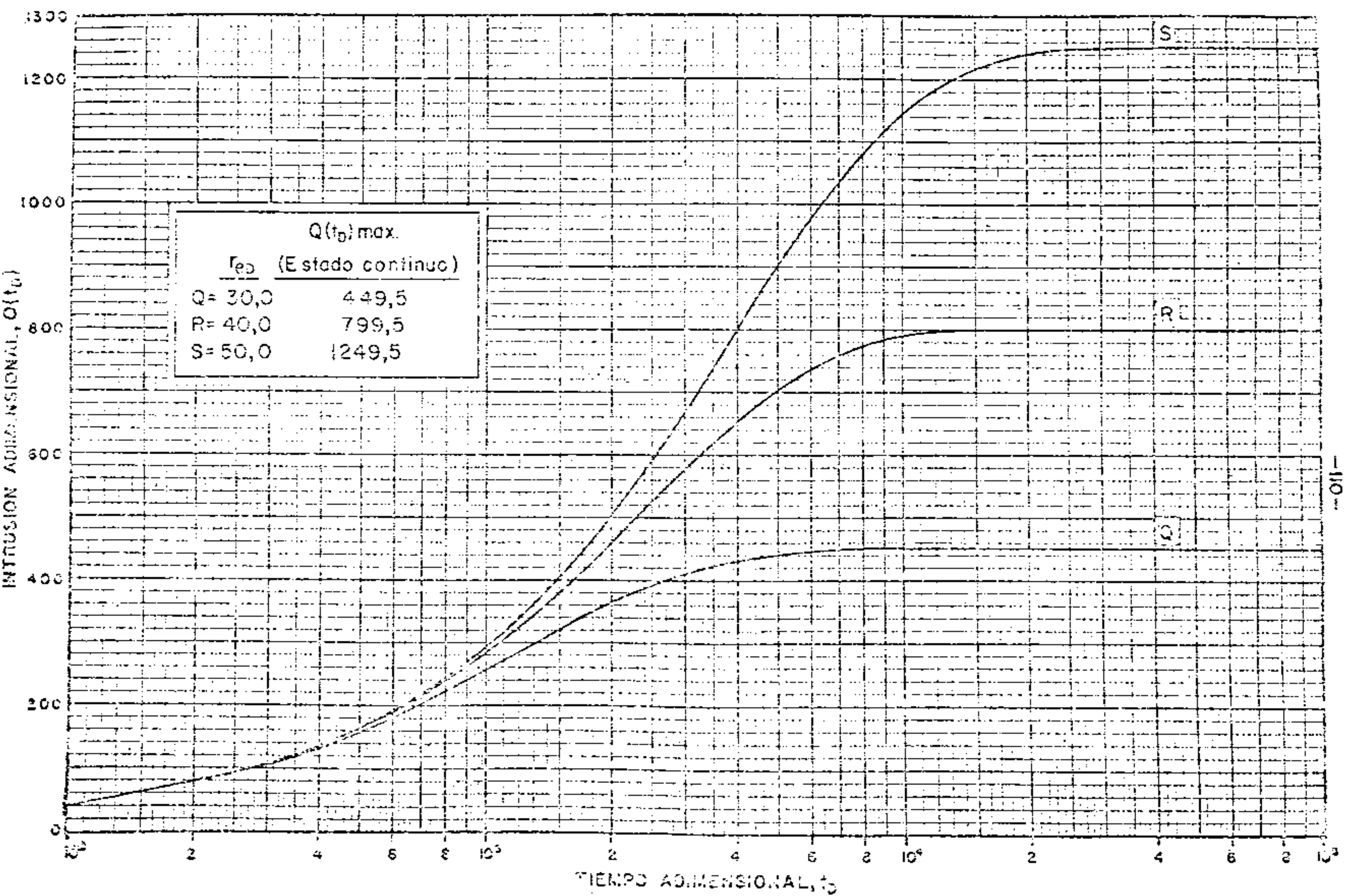


Fig. 40-Intrusión adimensional, $Q(t_D)$, como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito). Presión en el límite interior (contacto agua-petróleo) constante y rata de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado). Radio adimensional de 30,0; 40,0 y 50,0 (Referencia 31).

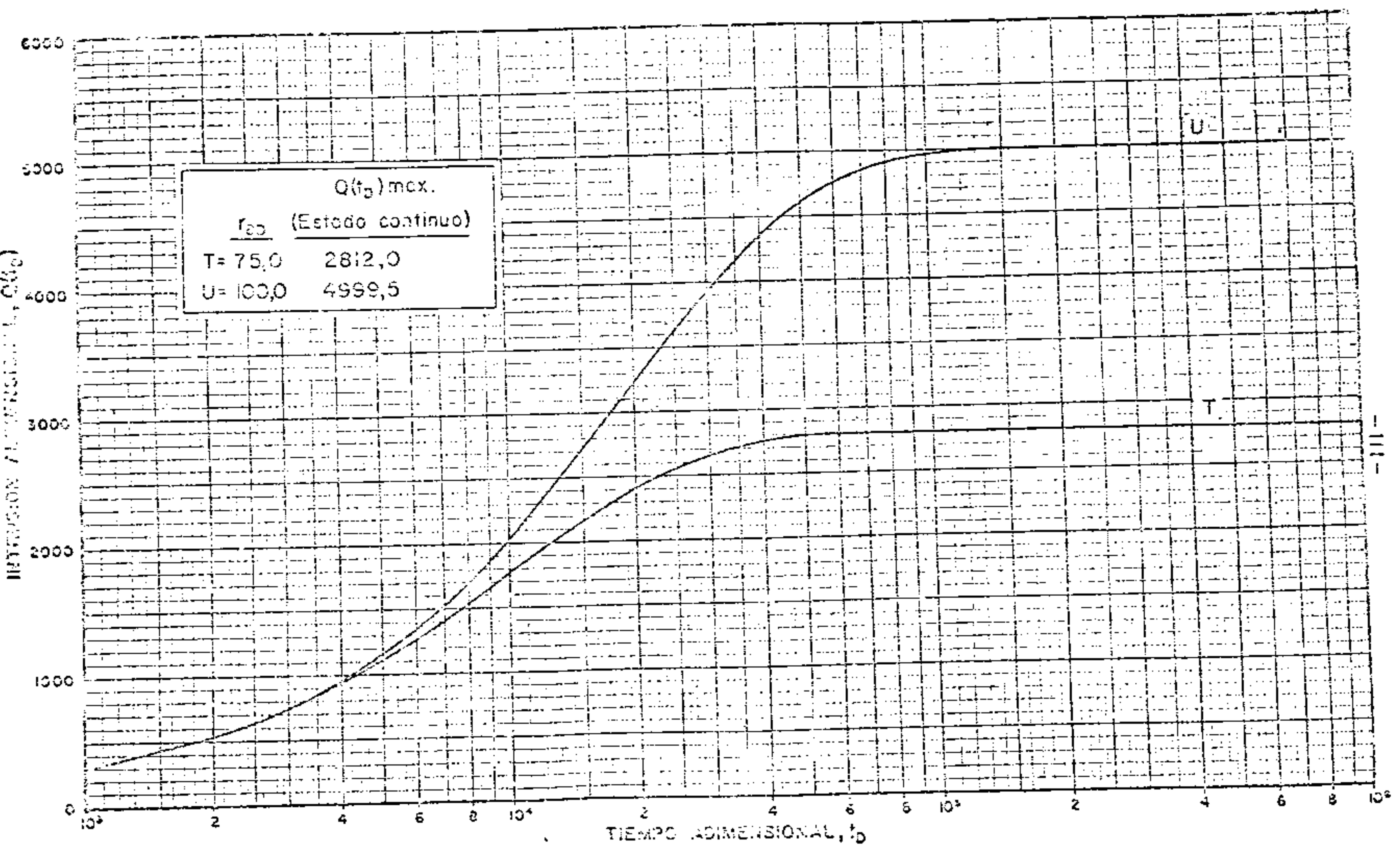


Fig. 41 Intrusión adimensional, $Q(t_D)$, como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito). Presión en el límite interior (contacto agua-petróleo) constante y rata de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado). Radio adimensional de 75,0 y 100,0. (Referencia 51).

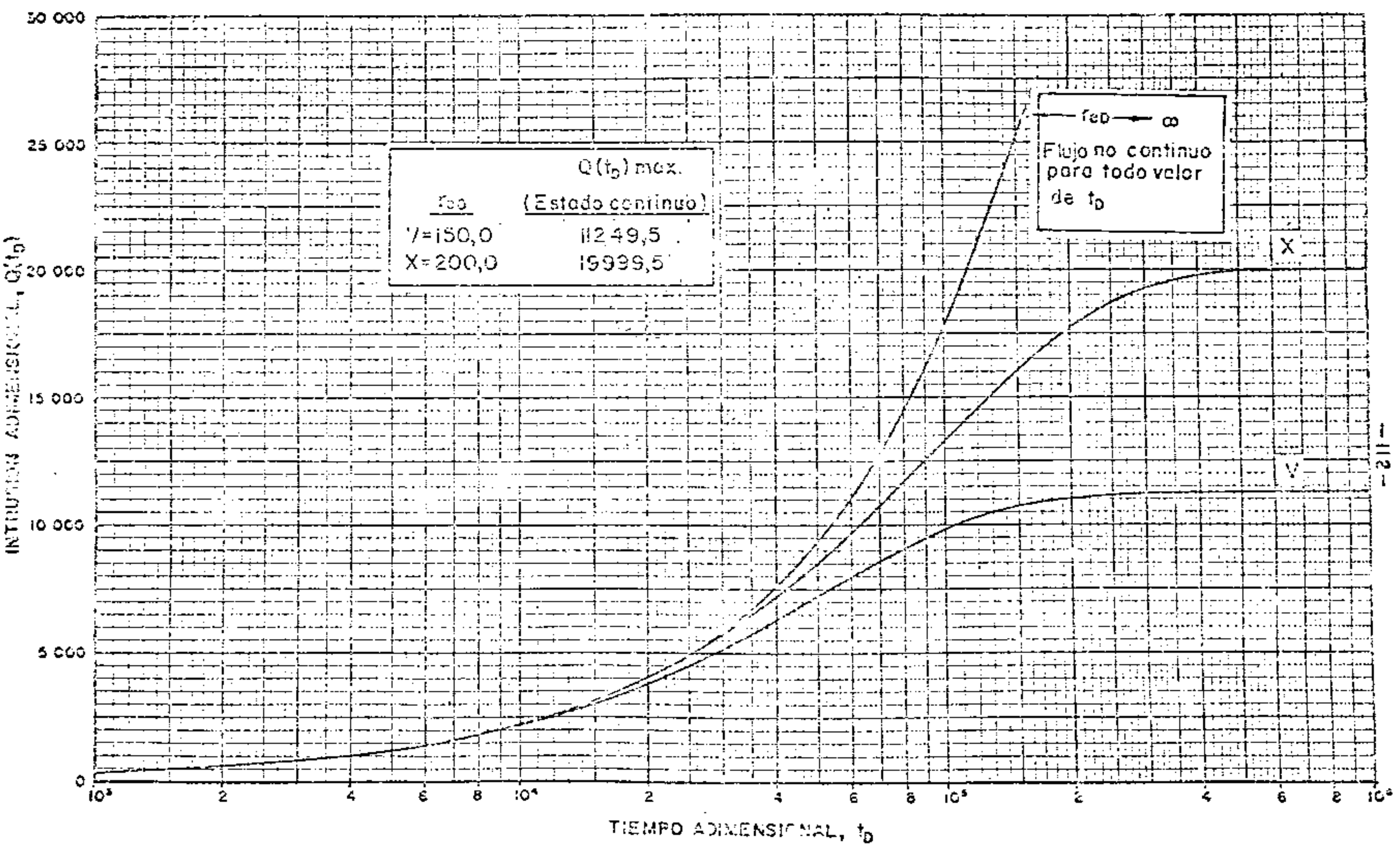


Fig. 42 – Intrusión adimensional, $Q(t_D)$, como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito). Presión en el límite interior (contacto agua–petróleo) constante y rata de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado). Radio adimensional de 150,0; 200,0; ∞. (Referencia 31).

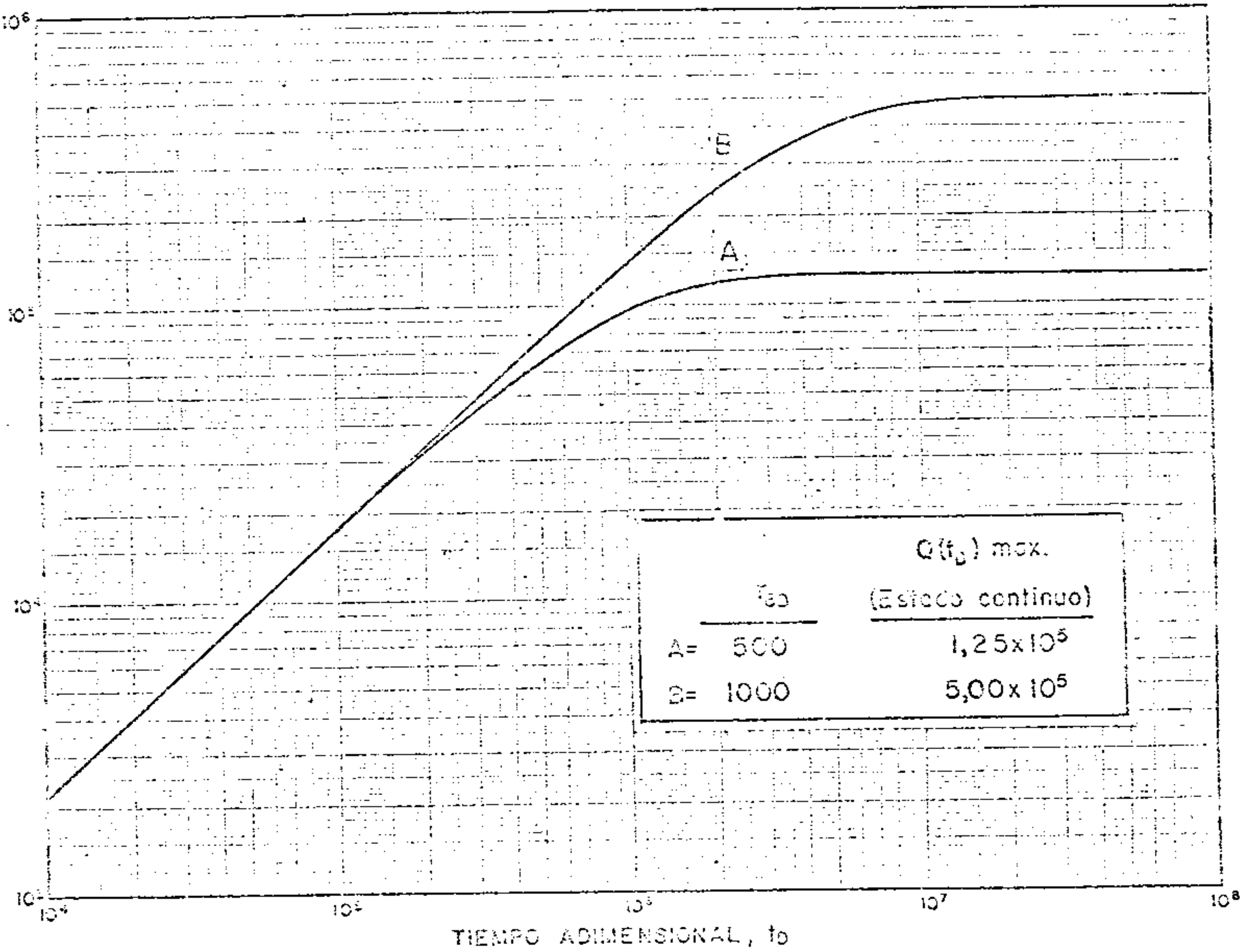


Fig. 45– Intrusión adimensional, Q(tD), como función de tiempo adimensional, tD. Sistema radial limitado (finito). Presión en el límite interior (contacto agua-petróleo) constante y rata de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado). Radio adimensional, 500 y 1000 (Referencia 31).

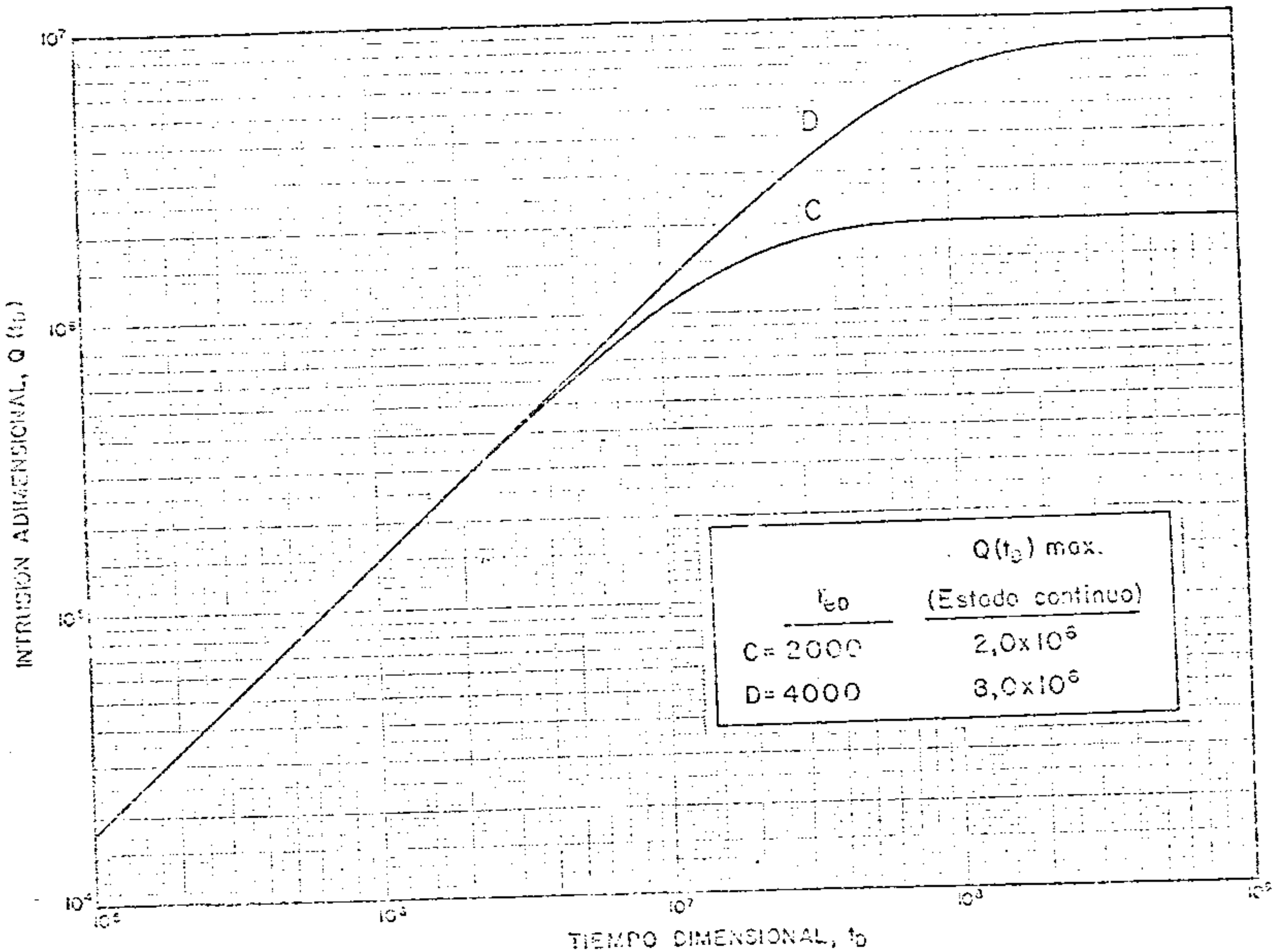


Fig. 44– Intrusión adimensional, $Q(t_D)$, como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito). Presión en el límite interior (contacto agua-petróleo) constante y rata de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado). Radio adimensional, 2000 y 4000 (Referencia 31).

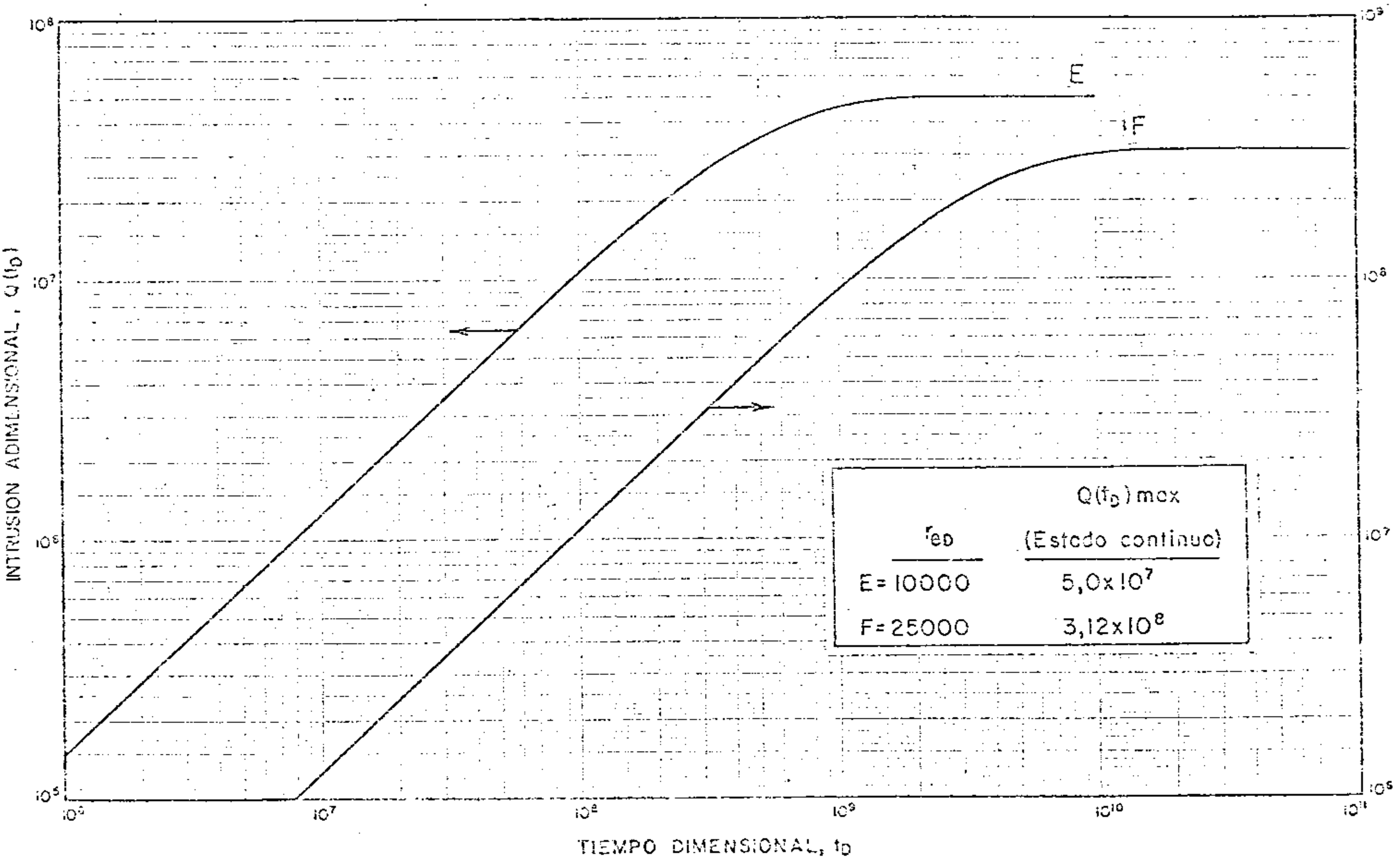


Fig. 45 – Intrusión adimensional, $Q(t_D)$, como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito). Presión en el límite interior (contacto agua-petróleo) constante y rata de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado). Radio adimensional, 10.000 y 25.000 (Referencia 31).

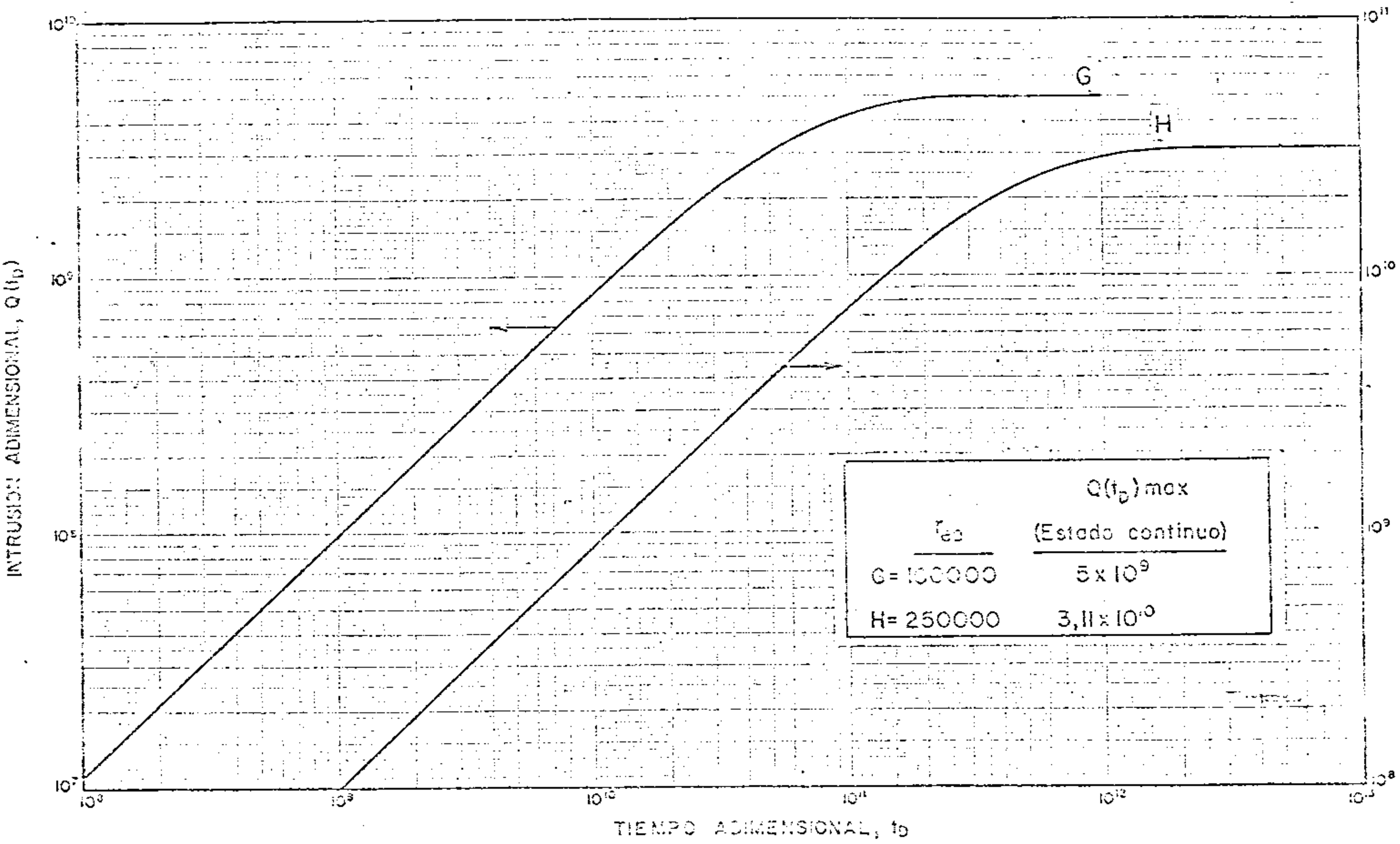


Fig. 46 - Intrusión adimensional, $Q(t_D)$, como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito). Presión en el límite interior (contacto agua-petróleo) constante y rata de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado). Radio adimensional, 100.000 y 250.000 (Referencia 31).

res y utilizando métodos numéricos para resolver la ecuación de difusividad. Los valores de $Q(t_D)$ para r_{eD} entre 1,2 y 100 se presentan en las Figs.47, 48 y 49.

Acuíferos Radiales No-Homogéneos.

En forma similar que para Acuíferos Lineales, Mueller[21] presenta soluciones para los Casos 3 y 5 de acuíferos radiales, donde igualmente varían linealmente las propiedades espesor, h, permeabilidad/viscosidad, k/μ y (porosidad)x(compresibilidad), ϕμ, entre el límite interior y el límite exterior. Define igualmente el factor β como la propiedad variante en el límite exterior dividada por la misma propiedad variante en el límite interior. Como puede observarse de las soluciones de los Casos 3 y 5, habría un número ilimitado de soluciones, ya que para cada valor de r_{eD} existe una solución específica. Mueller consideró los Casos 3 y 5 sólo para r_{eD}=10,0. Este valor es típico del tamaño de muchos acuíferos en el mundo. La Fig.50 presenta los resultados, $\Delta p(t_D)$ como función de t_D, correspondiente al Caso 3 y variación del espesor, según el valor de β entre 1/3 y 30. La Fig.51 presenta los resultados, $Q(t_D)$ como función de t_D, correspondiente al Caso 5 y para variación del espesor, de acuerdo al valor de β entre 1/8 y 4,0. Las Figs.52 y 53 presentan soluciones similares, también para el Caso 5, donde varía el factor permeabilidad/viscosidad y el factor (porosidad)x(compresibiliidad) respectivamente para valores de β entre 0,1 y 1000 y 0,1 y 10.

Lo que se discutió respecto a los factores k/μ y ϕc para el caso de acuíferos lineales, se cumple también para acuíferos radiales. Nótese la similitud entre las Figs.14 y 52. Su comportamiento es análogo por las razones discutidas al tratar la Fig.14.

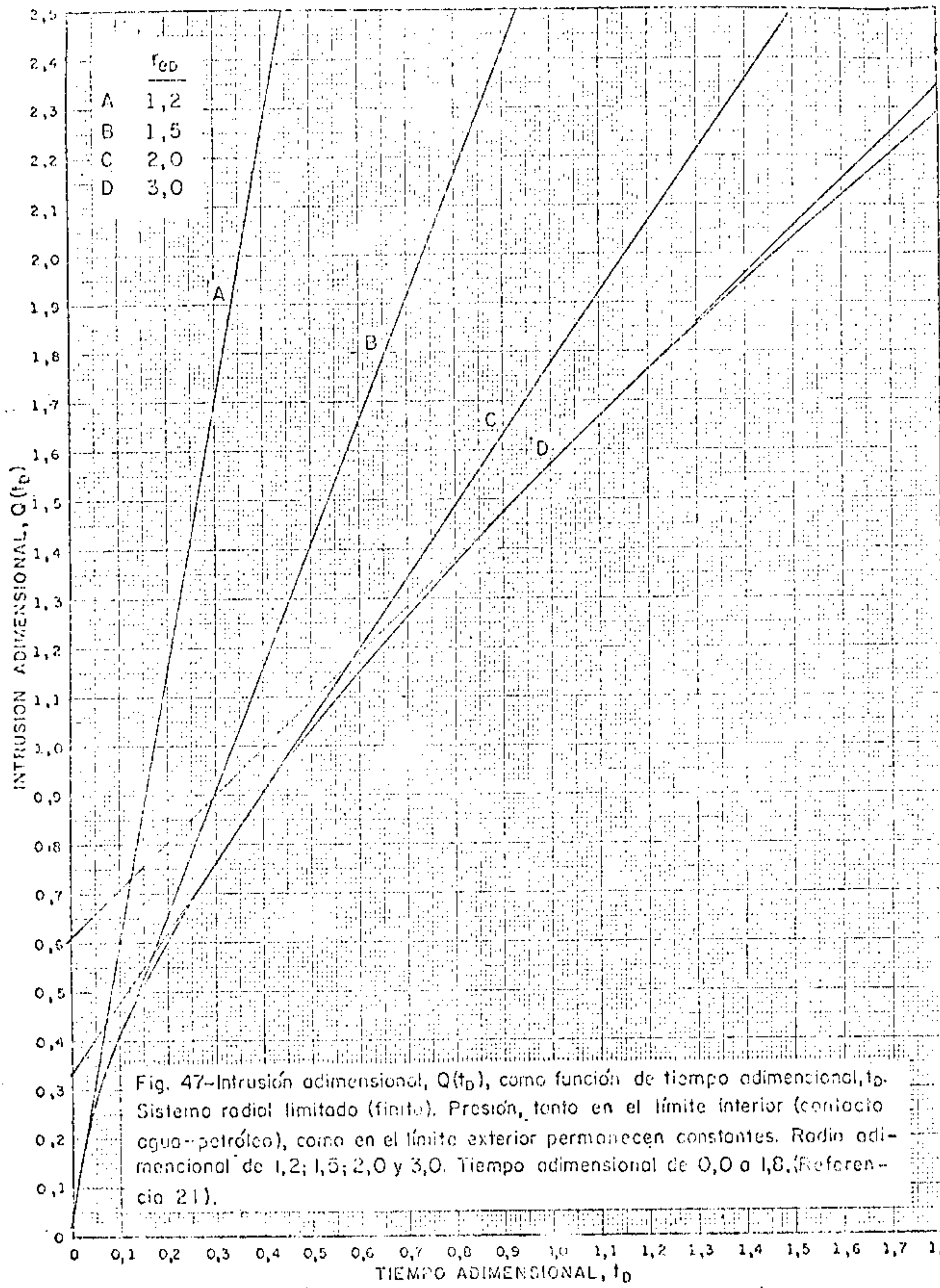


Fig. 47–Intrusión adimensional, $Q(t_D)$, como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito). Presión, tanto en el límite interior (contacto agua-petróleo), como en el límite exterior permanecen constantes. Radio adimensional de 1,2; 1,5; 2,0 y 3,0. Tiempo adimensional de 0,0 a 1,8. (Referencia 21).

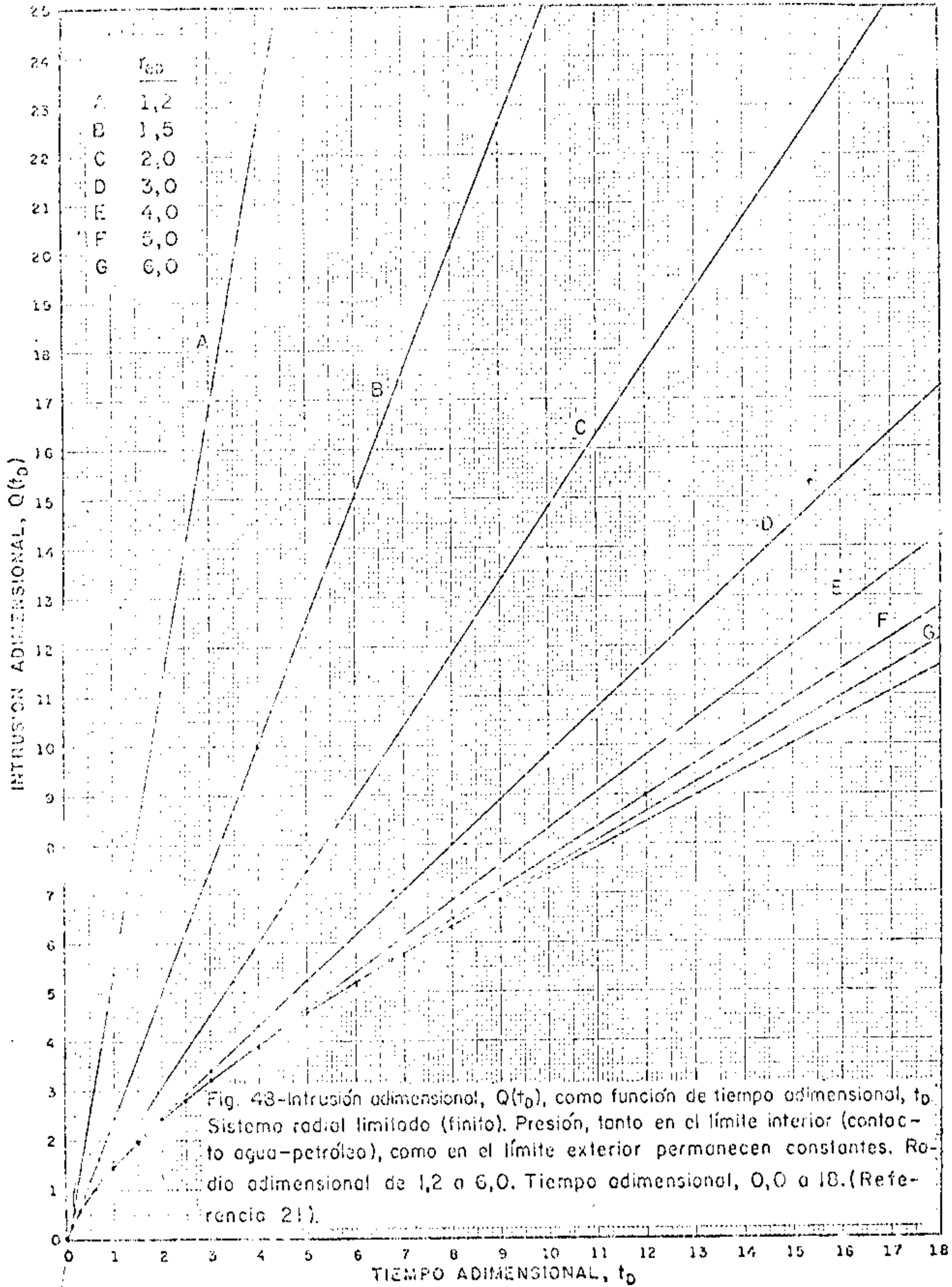


Fig. 48-Intrusión adimensional, $Q(t_D)$, como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito). Presión, tanto en el límite interior (contacto agua-petróleo), como en el límite exterior permanecen constantes. Radio adimensional de 1,2 a 6,0. Tiempo adimensional, 0,0 a 18. (Referencia 21).

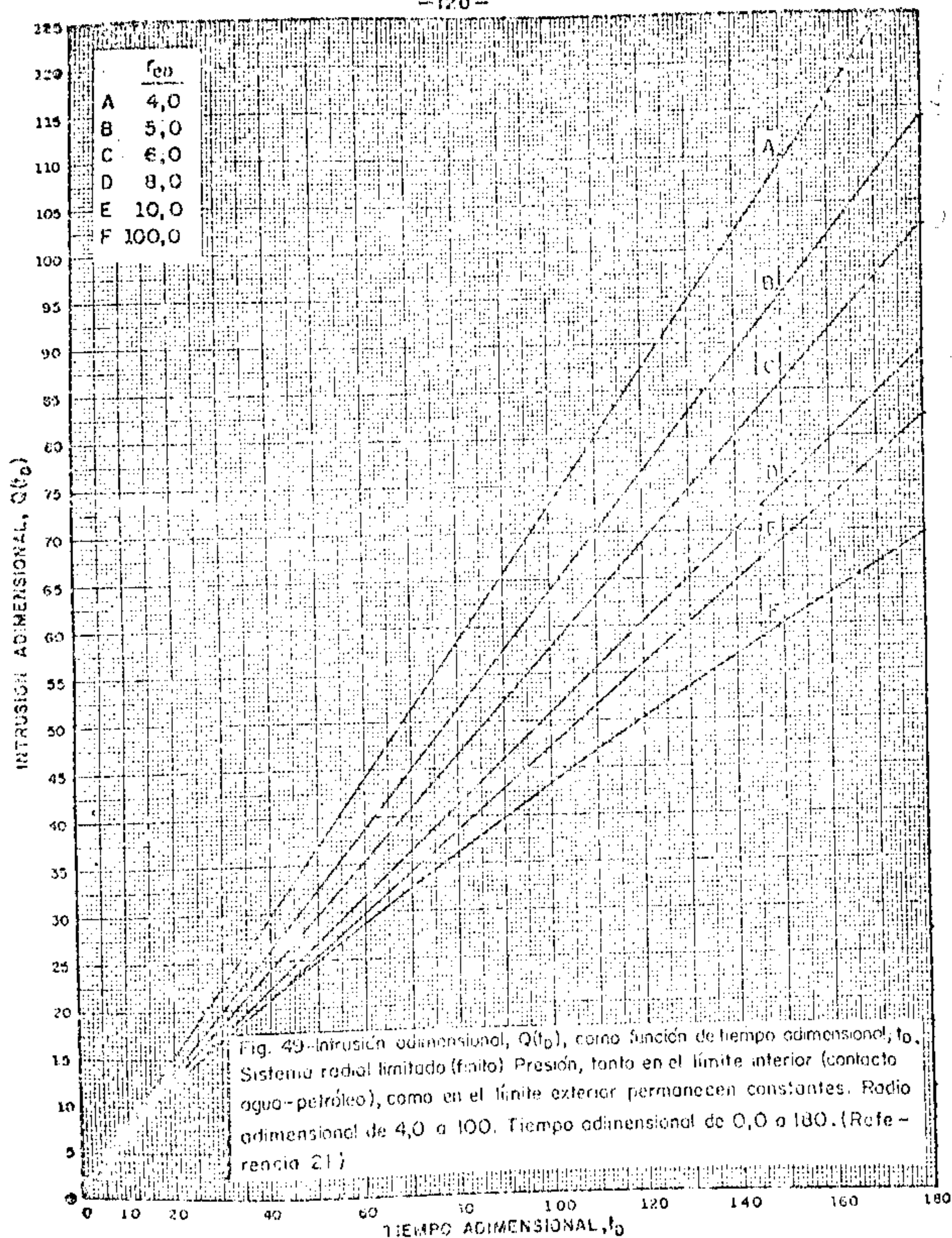


Fig. 49-Intrusión adimensional, $Q(t_D)$, como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito). Presión, tanto en el límite interior (contacto agua-petróleo), como en el límite exterior permanecen constantes. Radio adimensional de 4,0 a 100. Tiempo adimensional de 0,0 a 180. (Referencia 21)

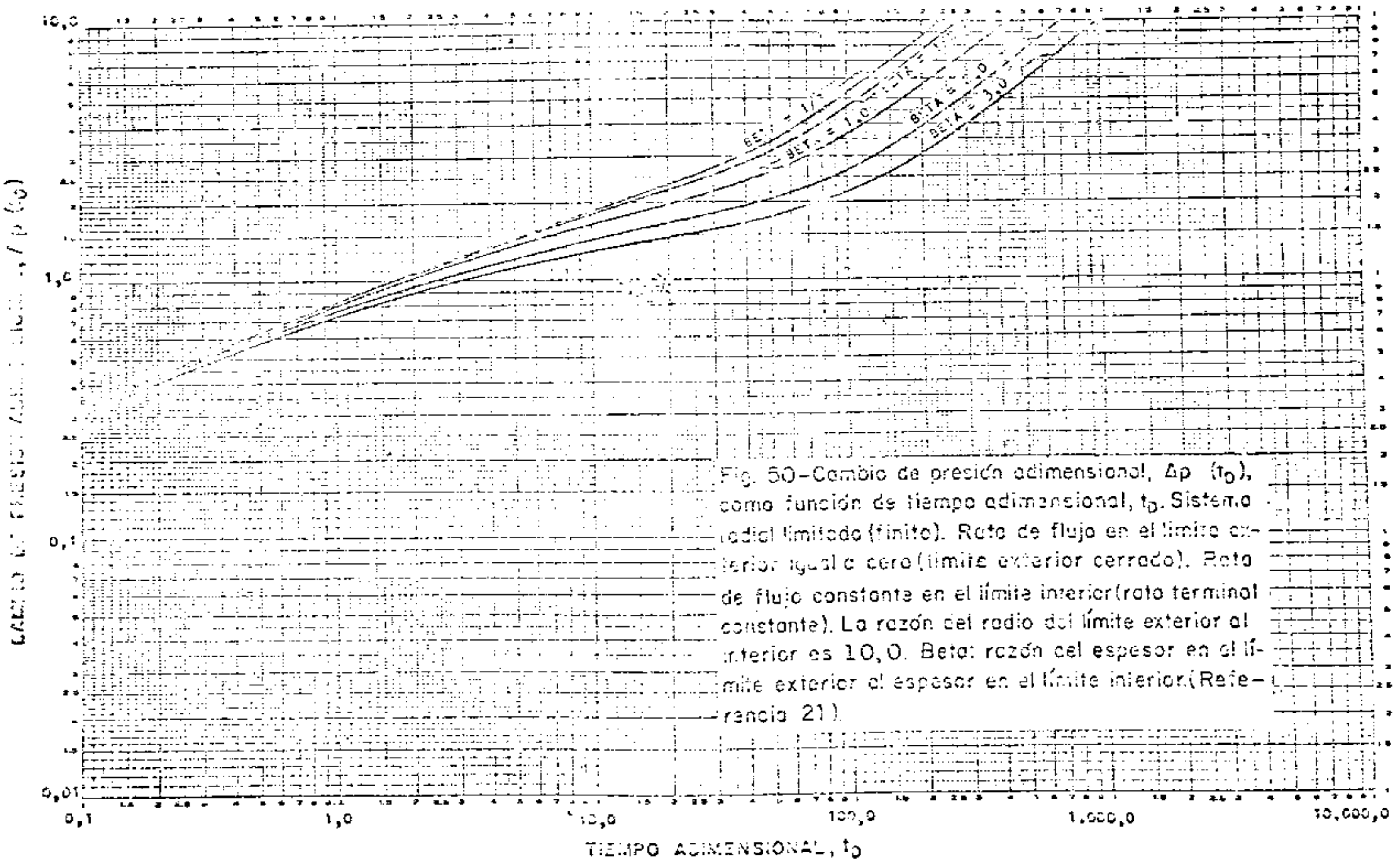


Fig. 50-Cambio de presión adimensional, Δp (t_D), como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito). Rata de flujo en el límite exterior igual a cero (límite exterior cerrado). Rata de flujo constante en el límite interior (rata terminal constante). La razón del radio del límite exterior al interior es 10,0. Beta: razón del espesor en el límite exterior al espesor en el límite interior. (Referencia 21).

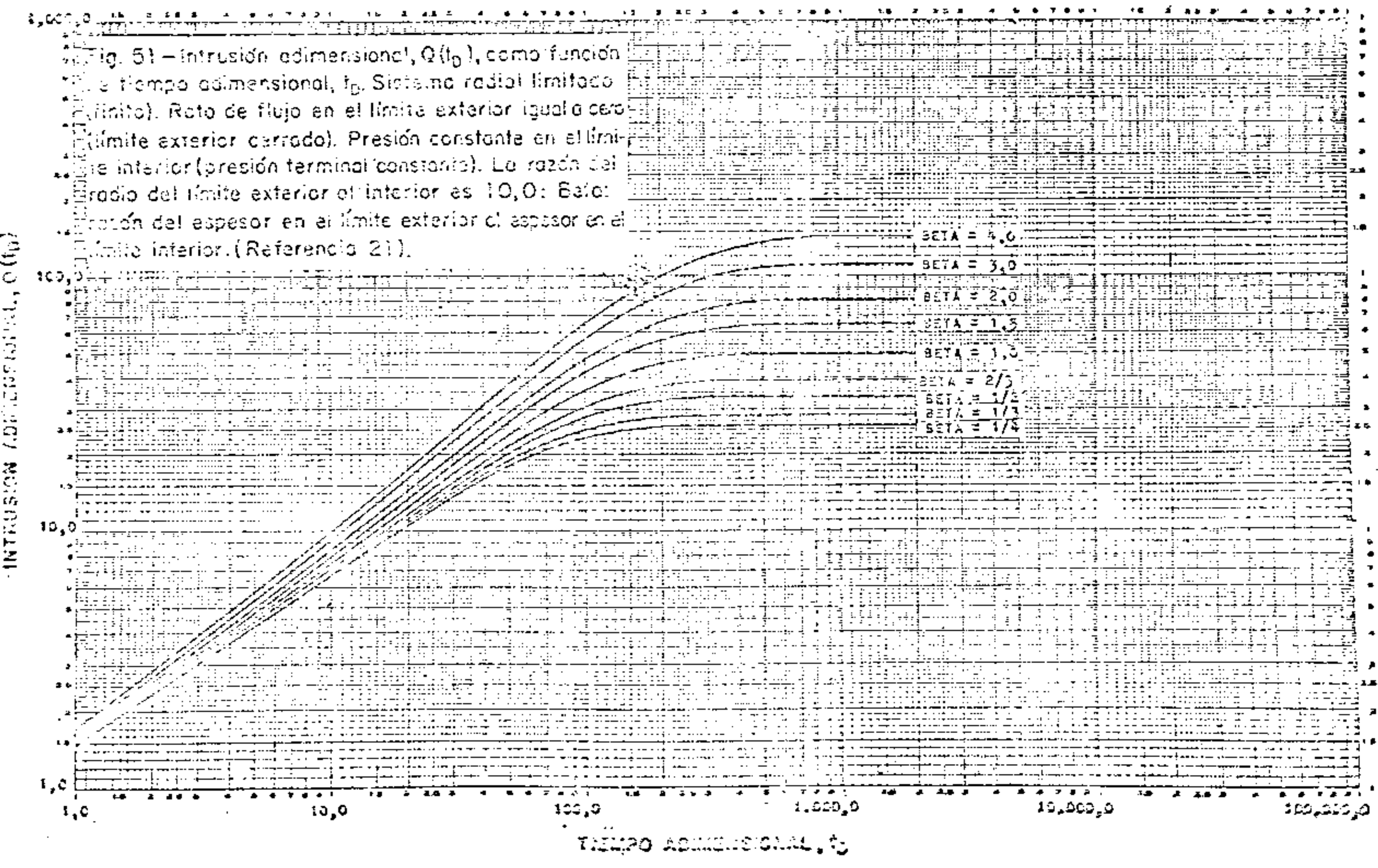


Fig. 51 – Intrusión adimensional, $Q(t_D)$, como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito). Rata de flujo en el límite exterior igual a cero (límite exterior cerrado). Presión constante en el límite interior (presión terminal constante). La razón del radio del límite exterior al interior es 10,0: Beta: razón del espesor en el límite exterior al espesor en el límite interior. (Referencia 21).

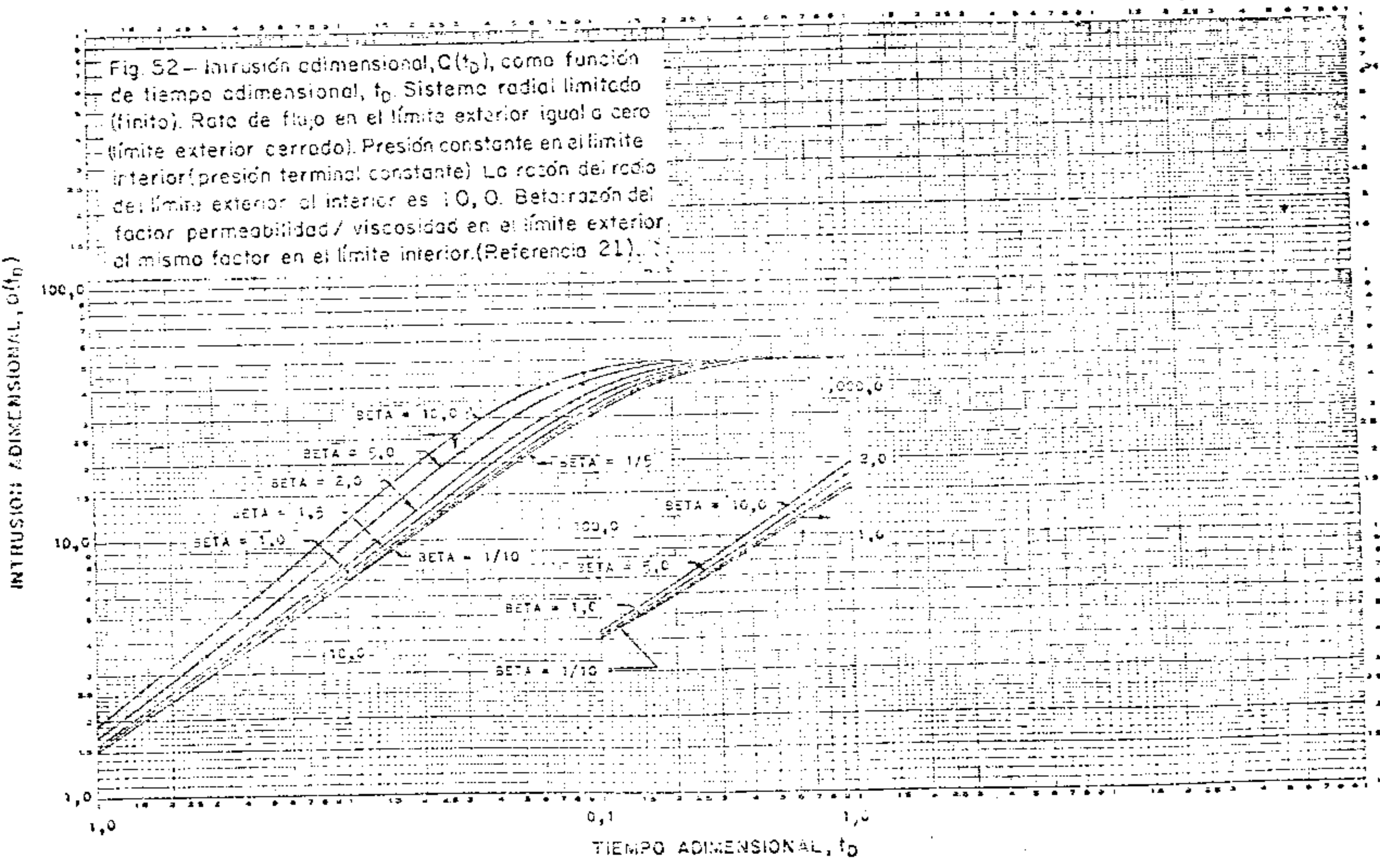


Fig. 52 – Intrusión adimensional, $Q(t_D)$, como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito). Rata de flujo en el límite exterior igual a cero (límite exterior cerrado). Presión constante en el límite interior (presión terminal constante). La razón del radio del límite exterior al interior es 10,0. Beta: razón del factor permeabilidad / viscosidad en el límite exterior al mismo factor en el límite interior. (Referencia 21).

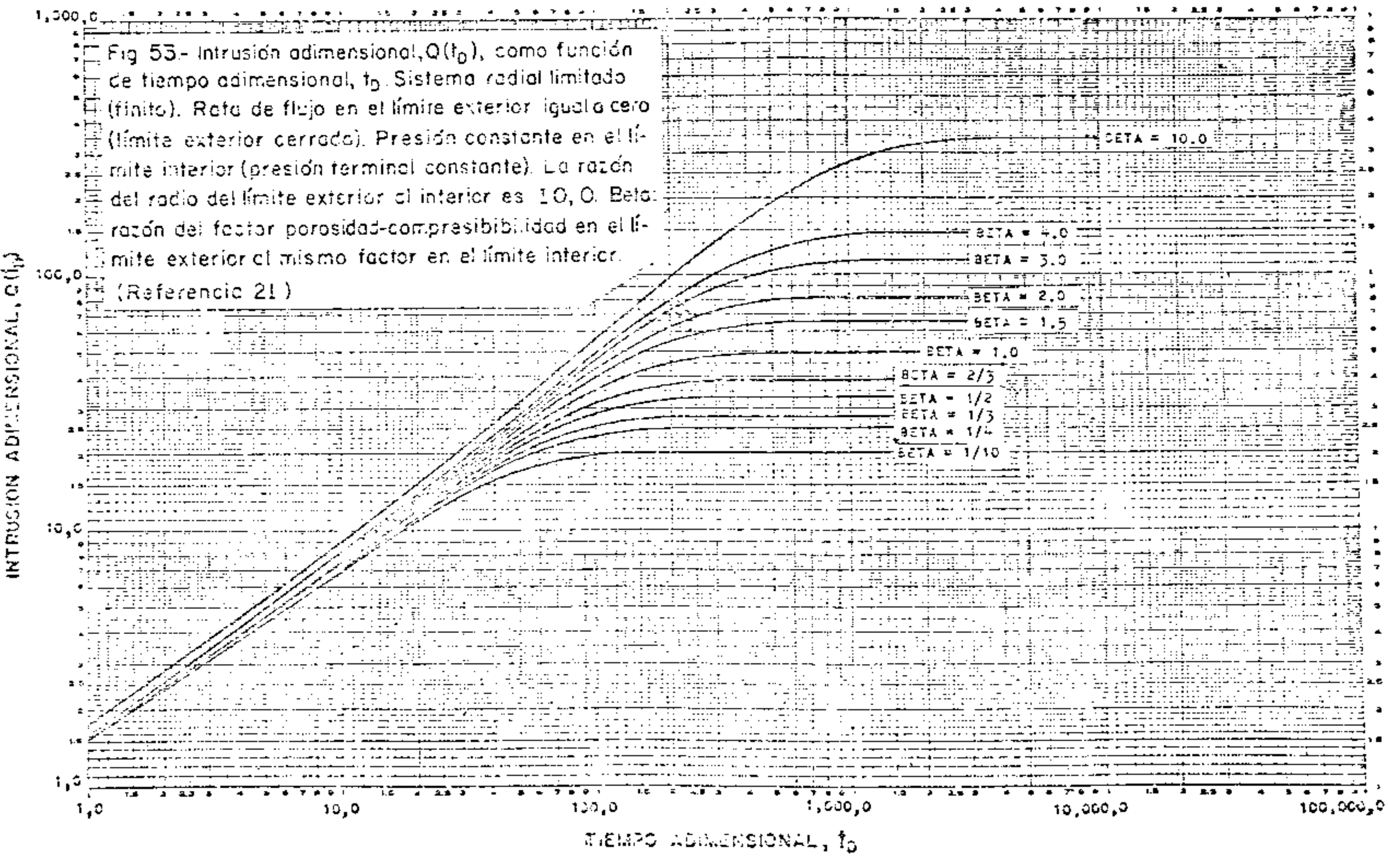


Fig 53.- Intrusión adimensional, $Q(t_D)$, como función de tiempo adimensional, t_D. Sistema radial limitado (finito). Rata de flujo en el límite exterior igual a cero (límite exterior cerrado). Presión constante en el límite interior (presión terminal constante). La razón del radio del límite exterior al interior es 10,0. Beta: razón del factor porosidad-compresibilidad en el límite exterior al mismo factor en el límite interior. (Referencia 21)

PRINCIPIO DE SUPERPOSICION

En las secciones anteriores se discutieron las diferentes soluciones más comunes para sistemas lineales y radiales, donde la rata de intrusión (o producción) o la presión en el límite interior, permanecen constantes con tiempo, es decir, los términos e (o q) y p (o Δp= pi-p) son constantes con tiempo, o sea los casos de rata terminal o presión terminal constante. Sin embargo, ésto en muy raras ocasiones ocurre en la práctica, pues es bien conocido que tanto e (o q) como p (o Δp = pi-p), cambian a medida que la intrusión o producción de un yacimiento avanza. Con el fin de aplicar las ecuaciones a estas situaciones se ha hecho uso del principio matemático denominado Teorema de Superposición o simplemente Principio de Superposición. Matemáticamente el principio o teorema de superposición establece que la combinación lineal de soluciones particulares de una ecuación diferencial homogénea y lineal es también una solución de la ecuación diferencial. Este principio es muy util en sistemas donde se imponen condiciones de límite (contorno). La solución general es la suma de las soluciones particulares obtenidas tratando una de las condiciones de límite a determinado tiempo.

El principio de superposición permite la obtención de la historia de presión, dada una historia determinada de rata de intrusión (o producción), o viceversa, puede obtenerse de la rata de intrusión (o producción), dada la historia de presión. Además si se conoce la historia de presión, puede calcularse la intrusión total de agua al yacimiento (o la producción total de petróleo del yacimiento) durante un período dado. Esta última aplicación del principio de superposición es más común cuando se trata de problemas de intrusión de agua a un yacimiento. El pri

mer caso, o sea cálculo de presiones, dada la historia de rata de producción, es más común en problemas relacionados con pruebas de pozos[18], o en problemas de acuíferos cuando se conoce la rata de intrusión. Por ejemplo, en yacimientos con un empuje hidráulico activo que producen por encima del punto de burbujeo, la rata de producción de petróleo puede asumirse aproximadamente igual a la rata de intrusión de agua. La rata de intrusión también puede obtenerse de datos de presión-producción de petróleo y haciendo un balance volumétrico de los fluídos en el yacimiento.

Cuando se conoce tanto la historia de presión como la historia de la rata de intrusión puede determinarse la denominada Función de Influencia[33,34] definida como el cambio en presión del yacimiento por rata de intrución unitaria.

La Fig.54 ayuda a deducir fórmulas del principio de superposición para el primer caso. Se conoce la histroia de la rata de intrusión (o producción), $e_1, e_2, e_3, \ldots e_n$ que comienzan a actuar respectivamente a los tiempos, 0, t_1, $t_2 \ldots t_{n-1}$. En la práctica, la historia de la rata de intrusión (o producción) se presenta en forma continua (línea continua), sin embargo, con el fin de poder aplicar las ecuaciones vistas anteriormente (rata terminal constante), se aproxima en forma escalonada, tal como indica la Fig.54. Además se conoce la presión inicial (original) del yacimiento.

Supóngase que se desea determinar la caída total de presion (y por consiguiente la presión) a un tiempo, t_n, comprendido entre t_1 y 0. Ya que en este intervalo, la rata de intrusión (o producción) es constante, e_1, se aplicarán directamente las Ecs.(26a), (28a) y (29a), para

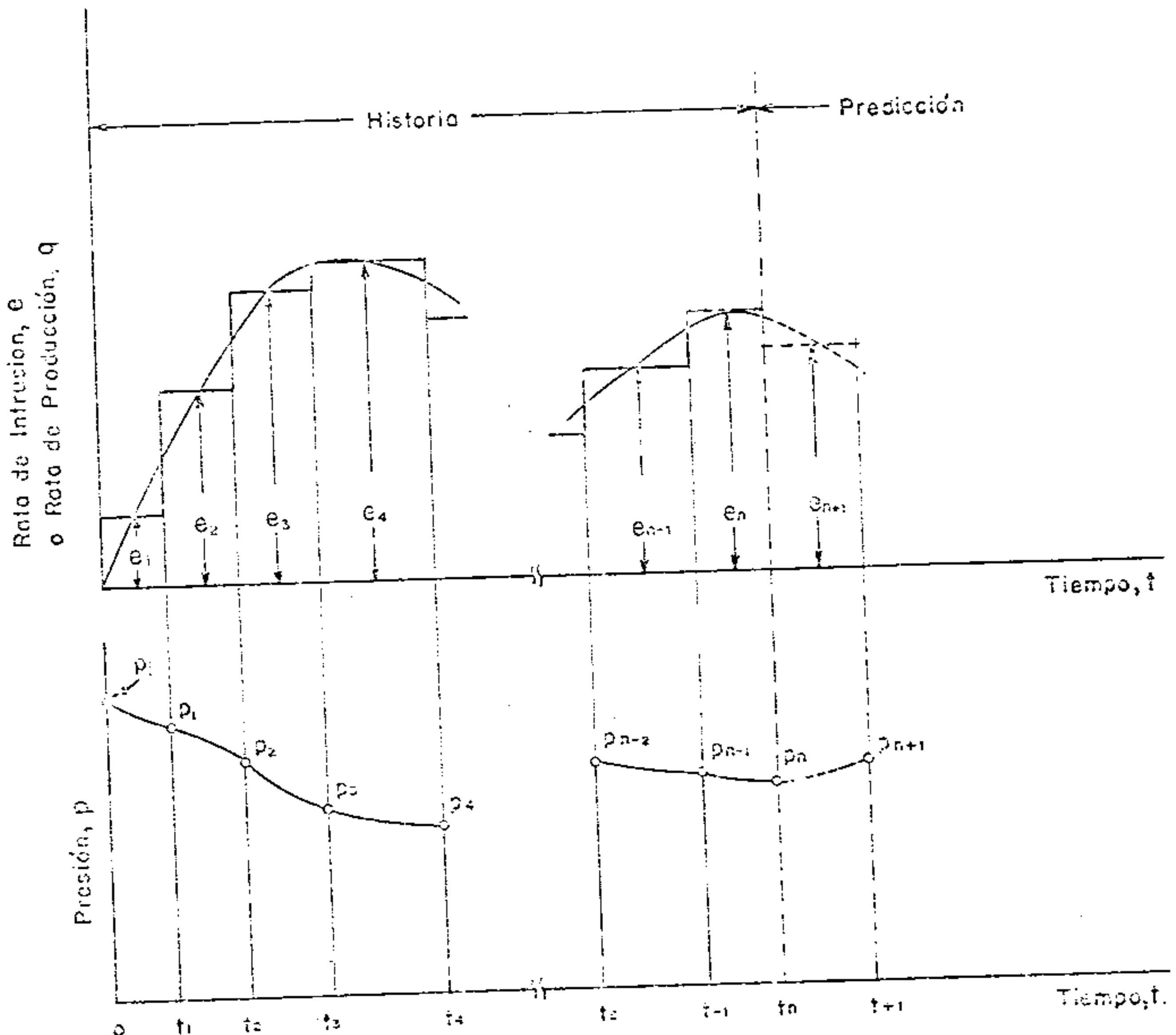


Fig. 54.— Historia de la rata de intrusión (o rata de producción) y de presión de un pozo (o yacimiento).

el caso de acuíferos lineales, y las Ecs.(37), (59) y (63) para el caso de acuíferos radiales:

Para $0 \leq t \leq t_1$:

Acuíferos Lineales,

$$\Delta p = (pi-p) = \frac{887,58\ e_1\ \mu L}{kbh} F_k\left[(t)_D\right] \qquad (73)$$

Acuíferos Radiales,

$$\Delta p = (pi-p) = \frac{141,2\ e_1\ \mu}{kh} \Delta p\left[(t)_D\right] \qquad (37)\ (59)\ (63)$$

Al tiempo, t_1, la rata de intrusión (o producción) aumenta por una cantidad (e_2-e_1). Este aumento en la rata de intrusión lógicamente causará una caída adicional de presión y la caída total de presión (y por consiguiente la presión) se calculará, para un tiempo t, comprendido entre t_2 y t_1, por la superposición de dos efectos: e_1 que actua por el tiempo (t-0), más (e_2-e_1) que actua por el tiempo $(t-t_1)$. En base a las ecuaciones anteriores, puede escribirse la caída total de presión:

Para $t_1 \leq t \leq t_2$:

Acuíferos Lineales,

$$\Delta p = (pi-p) = \frac{887,58\ e_1\ \mu L}{kbh} F_k\left[(t)_D\right] + \frac{887,58(e_2 - e_1)\mu L}{kbh} F_k\left[(t-t_1)_D\right]$$

Acuíferos Radiales,

$$\Delta p = (pi-p) = \frac{141,2\ e_1\ \mu}{kh} \Delta p\left[(t)_D\right] + \frac{141,2(e_2-e_1)\mu}{kh} \Delta p\left[(t-t_1)_D\right] \qquad ($$

Si al tiempo t_2, la rata de intrusión (o producción) cambia en una cantidad (e_3-e_2), éste nuevo efecto causará otra caída extra de presión, y la caída total de presión (y por consiguiente la presión), para un tiempo, t, comprendido entre t_3 y t_2, será la suma de tres efectos: e_1 que actua por un tiempo $(t-0)$, más (e_2-e_1) que actua por el tiempo $(t-t_1)$, más (e_3-e_2) que actua por el tiempo $(t-t_2)$. En base a las Ecs. (73) y (37) puede escribirse:

Para $t_2 \leq t \leq t_3$:

Acuíferos Lineales,

$$\Delta p = (pi-p) = \frac{887,58\ e_1\ \mu L}{kbh} F_k\left[(t)_D\right] + \frac{887,58(e_2-e_1)\mu L}{kbh} F_k\left[(t-t_1)_D\right] + \frac{887,58(e_3-e_2)\mu L}{kbh} F_k\left[(t-t_2)_D\right] \quad (76)$$

Acuíferos Radiales,

$$\Delta p = (pi-p) = \frac{141,2\ e_1\ \mu}{kh} \Delta p\left[(t)_D\right] + \frac{141,2(e_2-e_1)\mu}{kh} \Delta p\left[(t-t_1)_D\right] + \frac{141,2(e_3-e_2)\mu}{kh} \Delta p\left[(t-t_2)_D\right] \quad (77)$$

Si al tiempo t_3, la rata de intrusión (o producción) cambia en una cantidad (e_4-e_3), para calcular la caída total de presión a un tiempo, t, mayor de t_3, basta agregar este efecto a los anteriores, y escribir ecuaciones similares a las Ecs.(76) y (77), agregando otro término debido a (e_4-e_3). Así podría continuarse, para una secuencia de e_n ratas de intrusión tal como indica la Fig.54, y la caída total de pre-

sión a un tiempo t_n puede escribirse,

Para $t_n \geq t_{n-1}$:

Acuíferos Lineales,

$$\Delta p = (pi-p) = \frac{887{,}58\ \mu\ L}{kbh}\Big[e_1\ F_k[(t_n)_D] + (e_2-e_1)\ F_k[(t_n-t_1)_D] +$$

$$+ (e_3-e_2)\ F_k[(t_n-t_2)_D] + \dots + (e_n-e_{n-1})\ F_k[(t_{n-1})_D]\Big] \quad (7$$

$$\Delta p = (pi-p) = \frac{887{,}58\ e_1 \mu L}{kbh}\Big[F_k[(t_n)_D] + \sum_{j=2}^{n} \frac{(e_j-e_{n-1})}{e_1} F_k[(t_n-t_{j-1})_D]\Big] \quad (7$$

$$\Delta p = (pi-p) = \frac{887{,}58\ \mu L}{kbh} \sum_{j=1}^{n} (e_j-e_{j-1})\ F_k[(t_n-t_{j-1})_D] \quad (79$$

donde $e_o = 0$ y $t_o = 0$.

La Ec.(78) puede arreglarse en forma diferente,

$$\Delta p = (pi-p)\ \frac{887{,}58\mu L}{kbh}\ e_1\Big[F_k[(t_n)_D] - F_k[(t-t_1)_D]\Big] + e_2\Big[F_k[(t_n-t_1)_D] -$$

$$- F_k[(t_n-t_2)_D]\Big] + \dots \quad {}_{n-1}\Big[[(t_n-t_{n-2})_D] - F_k[(t_n-t_{n-1})_D]\Big] +$$

$$+ e_n\ F_k[(t_n-t_{n-1})_D] \quad ($$

$$\Delta p = (pi-p) = \frac{887{,}52\ \mu L}{kbh} \sum_{j=1}^{n} e_{n+1-j}\Big[F_k[(t_n-t_{n-j})_D] - F_k[(t_n-t_{n+1-j})_D]\Big] \quad (81)$$

donde $t_o = 0$.

Acuíferos Radiales,

$$\Delta p = (pi-p) = \frac{141,2\ \mu}{kh}\Big[e_1\ \Delta p[(t_n)_D] + (e_2-e_1)\ \Delta p[(t_n-t_1)_D] + (e_3-e_1)$$

$$\Delta p[(t_n-t_2)_D] + \ldots (e_n-e_{n-1})\ \Delta p[(t_n-t_{n-1})_D]\Big] \qquad (82)$$

$$\Delta p = (pi-p) = \frac{141,2\ e_1\ \mu}{kh}\left[\Delta p[(t_n)_D] + \sum_{j=2}^{n} \frac{(e_j-e_{j-1})}{e_1}\Delta p[(t_n-t_{j-1})_D]\right] \qquad (83)$$

$$\Delta p = (pi-p) = \frac{141,2\ \mu}{kh}\sum_{j=1}^{n}(e_j-e_{j-1})\ \Delta p[(t_n-t_{j-1})_D] \qquad (84)$$

donde $e_o = 0$ y $t_o = 0$.

La Ec.(82) puede arreglarse en forma diferente,

$$\Delta p = (pi-p) = \frac{141,2\ \mu}{kh}\quad e_1\Big[\Delta p[(t_n)_D] - \Delta p[(t-t_1)_D]\Big] + e_2\Big[\Delta p[(t_n-t_1)_D] -$$

$$- \Delta p[(t_n-t_2)_D]\Big] + \ldots e_{n-1}\Big[\Delta p[t_n-t_{n-2})_D] - \Delta p[(t_{n-1})_D]\Big] +$$

$$+ e_n\ \Delta p[(t_n-t_{n-1})_D] \qquad (85)$$

$$\Delta p = (pi-p) = \frac{141,2\ \mu}{kh}\sum_{j=1}^{n} e_{n+1-j}\Big[\Delta p[(t_n-t_{n-j})_D] - \Delta p[(t_n-t_{n+1-j})_D]\Big] \quad ($$

donde $t_o = 0$

Debe tenerse presente en las ecuaciones anteriores (Ec.(73) en adelante) que el término p es la presión al tiempo t o t_n. Ya que pi se conoce, puede calcularse p, una vez calculado Δp.

El principio de superposición con el fin de obtener la intrusión(o producción) total, dada la historia de presión, es muy similar al caso anterior. La Fig.55 ilustra la historia de presión de un yacimiento (o contacto agua-petróleo). De nuevo, con el fin de poder aplicar las ecuaciones vistas anteriormente para el caso de presión terminal cosntante, la historia de presión se aproxima en forma escalonada, y se determinan las caídas de presión (presiones diferenciales o decrementos de presión) Δp_1, Δp_2, Δp_4, ... Δp_n. (Sobre la forma de obtener estas presiones diferenciales, véase p.145).

Se desea calcular la intrusión total a un tiempo, t, comprendido entre 0 y t_1. En este caso, el Δp_1 es constante durante este tiempo. Por lo tanto pueden aplicarse las Ecs.(27a), (30a) y (31a) para el caso de acuíferos lineales y las Ecs.(51) y (69) para acuíferos radiales.

Para $0 \leq t \leq t_1$:

Acuiferos Lineales,

$$We = \frac{\phi bhLc}{5,615} \Delta p_1 \ F_k[(t)_D] \tag{87}$$

Acuíferos Radiales,

$$We = 1,119\phi chR_i^2 \frac{0}{360^o} \Delta p_1 \ Q[(t)_D] \qquad (51), (69)$$

Hasta el tiempo t_1, la presión se ha mantenido constante en $p = pi - \Delta p_1$. Si a éste tiempo t_1, la presión disminuye en un Δp_2 ($p = p_i - \Delta p_1 - \Delta p_2$), habrá un aumento extra en la intrusión para tiempos posteriores. Si el tiempo, t, a la cual se desea obtener la intrusión total está comprendido entre t_1 y t_2, tal intrusión se calculará por

la superposición de los efectos: Δp_1 que actua por el tiempo (t-0),más Δp_2 que actua con el tiempo $(t-t_1)$. En esta forma puede escribirse,

Para $0 \leq t \leq t_1$:

Acuíferos Lineales,

$$We = \frac{\phi bhlc}{5,615} \Delta p_1 \; F_k[(t)_D] + \frac{\phi bhlc}{5,615} \Delta p_2 \; F_k\{(t-t_1)_D\} \quad (88)$$

Acuíferos Radiales,

$$We = 1,119 \; \phi chR_i^2 \frac{\theta}{360°} \Delta p_1 \; Q[(t)_D] + 1,119 \phi cR_i^2 \frac{\theta}{360°} \Delta p_2 \; Q[(t-t_1)_D] \quad (89)$$

Similarmente, si se desea calcular la intrusión total a un tiempo, t, comprendido entre t_2 y t_3, y teniendo en cuenta que el tiempo t_2, ocurre una caída extra de presión Δp_3 (la presión ahora será $p = pi-\Delta p_1-$ $-\Delta p_2-\Delta p_3$), el efecto total será la suma de tres efectos: Δp_1 que actua por un tiempo $(t-t_1)$, Δp_2 que actua por un tiempo $(t-t_1)$ y Δp_3 que actua por un tiempo $(t-t_2)$. Por tanto, puede escribirse,

Para $t_1 \leq t \leq t_2$:

Acuíferos Lineales,

$$We = \frac{\phi bhLc}{5,615} \Delta p_1 \; F_k[(t)_D] + \frac{\phi bhLc}{5,615} \Delta p_2 \; F_k\{(t-t_1)_D\} +$$

$$+ \frac{\phi bhLc}{5,615} \Delta p_3 \; F_k[(t-t_1)_D] \quad (9$$

Acuíferos Radiales,

$$We = 1{,}119\phi chR_i^2 \frac{\theta}{360°}\Delta p_1\ Q[(t)_D] + 1{,}119\phi chR_i^2 \frac{\theta}{360°}\Delta p_2\ Q[(t-t_1)_D] +$$

$$+ 1{,}119\phi chR_i^2 \frac{\theta}{360°}\Delta p_3\ Q[(t-t_2)_D] \qquad (91$$

Si al tiempo t_3, la presión disminuye aún más, por una cantidad Δp_4, para calcular la intrusión total a un tiempo, t, mayor que t_3, basta agregar el efecto del Δp_4 a las ecuaciones anteriores en forma similar. Así podría continuarse hasta llegar a Δp_n caídas de presión, y la intrusión total a un tiempo, t_n, será,

Para $t_n \leq t_{n-1}$:

Acuíferos Lineales,

$$We = \frac{\phi bhLc}{5{,}615}\left[\Delta p_1\ F_K[(t_n)_D] + \Delta p_2\ F_K[(t_n-t_1)_D] + \Delta p_3\ F_K[(t_n-t_2)_D] + \ldots\right.$$

$$\left. + \Delta p_n\ F_K[(t_n-t_{n-1})_D]\right] \qquad (9$$

$$We = \frac{\phi bhLc}{5{,}615}\sum_{j=1}^{n}\Delta p_j\ F_K[(t_n-t_{j-1})_D] \qquad (9$$

donde $t_o = 0$

Acuíferos Radiales,

$$We = 1{,}119\phi chR_i^2 \frac{\theta}{360°}\left[\Delta p_1\ Q[(t_n)_D] + \Delta p_2\ Q[(t_n-t_1)_D] +\right.$$

$$\left. + \ldots \Delta p_n\ Q[(t_n-t_{n-1})_D]\right] \qquad (94$$

$$We = 1{,}119\phi chR_i^2 \frac{\theta}{360^\circ} \sum_{j=1}^{n} \Delta p_j Q[(t_n - t_{j-1})_D] \qquad (95$$

METODOS DE ANALISIS DE YACIMIENTOS CON EMPUJE HIDRAULICO

El método de análisis de un yacimiento (o campo) que presenta intrusión de agua (empuje hidráulico) depende de los datos disponibles, de lo que se desee determinar y de las suposiciones sobre comportamiento futuro del yacimiento (predicciones). En la presente sección, se discutirán diferentes métodos de utilizar la historia del yacimiento, con el fin de determinar el tipo de intrusión de agua; además, se discute el análisis de la historia con el propósito de llevarla a expresiones analíticas con el fin principal de hacer predicciones. Posteriormente, se analizarán algunos de los métodos existentes de predicción de acuerdo a lo que se desee determinar: presión, rata de intrusión, etc.

Determinación y Forma de Expresar la Intrusión de Agua, We.

Una de las formas más sencillas para determinar el término de intrusión We, es por balance de materiales[1]. Lógicamente, este método asume conocidos todos los términos de la ecuación de balances de materiales, excepto We, es decir, asume conocido el petróleo originalmente en el yacimiento, N, el factor m (en caso que exista capa de gas inicial), datos de producción y datos PVT.

Cuando se conoce con bastante exactitud los límites del yacimiento y se dispone de un buen mapa isopaco, el valor de N puede determinarse con bastante exactitud por el método volumétrico,

$$N = \frac{7758\ Ah\phi(1-S_w)}{B_{oi}} \qquad (96)$$

donde N se expresa en barriles normales, BN; A en acres; h en pies y B_{oi} en BY/BN. La saturación de agua connata, S_w y la porosidad, ϕ, pueden determinarse por registros o de análisis de núcleos. Boi puede conocerse de análisis PVT o por correlaciones.

Otro método[35] para determinar N, consiste en calcular este valor de la ecuación de balance de materiales a diferentes tiempos, considerando We=0 (m, en caso de existir, debe ser conocido). El valor de N calculado aumentará con tiempo y la extrapolación gráfica a t=0, será el valor correcto de N.

De lo anterior puede afirmarse que el método de análisis de la historia del yacimiento con el fin de expresar la intrusión de agua por una fórmula determinada, dependerá de si se conoce o no con suficiente exactitud el valor del petróleo originalmente en el yacimiento. Por tanto, la discusión se dividirá en dos partes principales: N conocido y N desconocido.

Análisis de la Historia si se conoce el Petróleo o Gas Originalmente en el Yacimiento, N o G.

Si se conoce este valor, pueden calcularse una serie de valores de We, por balance de materiales (m debe ser conocido en caso de yacimientos de petróleo con capa de gas inicial) y del análisis de We como función de tiempo y presión en el contacto agua-petróleo, puede obtenerse una expresión para representar la intrusión de agua. Una vez obtenida tal expresión, puede predecirse una intrusión futura, de acuerdo al método usado, como se verá posteriormente.

La siguientes ecuaciones de balance de materiales[1] se usan para calcular la intrusión de agua, We:

o/p las deducciones están mal

a) Yacimiento de petróleo no-saturados (por encima del punto de Burbujeo),

bo

$$We = NBoi - (N-Np) + W_p - W_i \tag{97}$$

ya que por encima del punto de burbujeo, el Bo depende de la compresibilidad efectiva c_e, puede escribirse,

$$B_o = B_{oi} + B_{oi}\, c_e(pi-p) \tag{98}$$

donde,

$$c_e = \frac{S_o c_o + S_w c_w + c_p}{(1-S_w)} \tag{99}$$

Reemplazando esta expresión en la Ec.(98), puede escribirse,

$$We = N_p Bo - NB_{oi}\, c_e(pi-p) + W_p - W_i \tag{100}$$

b) Yacimientos de petróleo saturados,

$$We = N\left[(B_{ti}-Bt) - Bti\, c_e(pi-p) - m\, Bti\left(\frac{B_g}{Bgi} - 1\right)\right] -$$

$$- Np\{Bt + (Rp-R_{si})Bg\} + Wp - Wi - GiBig \tag{101}$$

En este caso,

$$c_e = \frac{S_w c_w + c_p}{(1-S_w)} \tag{102}$$

c) Yacimientos de gas,

$$We = Gp\ B_g - G\left(\frac{B_g}{Bgi} - 1\right) + W_p - W_i \tag{103}$$

Como se mencionó antes, debe conocerse el gas originalmente en el ya-

cimiento, G, con el fin de poder calcular We.

Las eucaciones anteriores son generales y consideran inyección de agua, gas,o ambos, según el caso y lo mismo que compresibilidad del agua y de la formación. Si alguno o algunos de estos términos no existen o se consideran iguales a cero, se eliminana de las ecuaciones correspondientes. Recuérdese que la saturación de agua connata, S_w, se considera constante e inmóvil.

Aparte del uso de balance de materiales para la determinación de We, se han desarrollado otras fórmulas de acuerdo al comportamiento de presión con tiempo en el contacto agua-petróleo. La intrusión de agua a un yacimiento, generalmente puede dar lugar a tres tipos de respuestas de presión con tiempo: flujo continuo, flujo continuo-modificado y flujo no-continuo. El método de analizar cada caso, para N conocido, se describe en las siguientes secciones.

Intrusión con Flujo Continuo. - Este tipo de intrusión se expresa mediante la fórmula de Schilthuis[36], donde la rata de intrusión es función lineal de la caída de presión en el contacto agua-petróleo,

$$e = \frac{dWe}{dt} = C_s(pi-p) \qquad (104)$$

Integrando,

$$We = C_s\int_o^t (pi-p)dt = C_s\ f(p,t) \qquad (105)$$

donde C_s es la constante de intrusión de agua de Schilthuis, generalmente expresada en bls/tiempo/lpc (donde el tiempo puede ser días, meses, trimestres, etc); f(p,t) es el valor del integral; pi es la pre

sión inicial (original) en el contacto agua-petróleo y p la presión al tiempo t.

Como puede observarse, para calcular We, debe conocerse la historia de presión en el contacto agua-petróleo(p como función de t) y la constante C_s. A su vez para concer esta constante es necesario hacer uso de la historia del yacimiento y calcular We a varios tiempos por la ecuación de balance de materiales. Una vez calculado We se hace uso de la Ec.(104) para calcular Cs, escribiendo dWe/dt en forma de diferencias Finitas,

$$Cs = \frac{\frac{\Delta We}{\Delta t}}{(pi-p)} \qquad (106)$$

Generalmente el Δt es constante y en tal caso, el ΔWe se toma como el promedio de la diferencia entre el We al tiempo posterior menos el W_e al tiempo anterior,

$$\Delta We = \frac{1}{2}(We_{j+1} - We_{j-1}) \qquad (107)$$

donde j es el período a la cual se desea determinar el valor de C_s. En esta forma se calcula una serie de valores de Cs (un valor para cada tiempo) y de acuerdo a su variación puede concluirse respecto al tipo de intrusión: si Cs es más o menos constante con tiempo, puede considerarse que la intrusión sigue condiciones de flujo continuo; por otro lado, si varía mucho con tiempo se concluye que la intrusión sigue otro tipo de flujo (continuo-modificado, o no-continuo). También debe tenerse en cuenta que puede presentarse el caso de obtener una variación considerable al comienzo de la intrusión, donde ocurre un flujo netamente no-continuo, pero luego que el radio llegue a un límite (si el

acuífero es finito), el flujo cambia a semi-continuo y el valor de Cs, tiende a ser constante. En este caso, puede tomarse un valor promedio de Cs en la parte donde presenta valores más o menos constantes y usar tal valor para calcular We a tiempos futuros, según la Ec.(105). Por supuesto, debe asumirse la presión al tiempo futuro, cosa que puede hacerse aproximadamente, si la predicción no es para un tiempo muy largo, extrapolando la curva conocida, de presión como función de tiempo. Como puede verse, este método de predicción no es muy exacto y sólo puede tomarse como una aproximación de lo que puede esperarse. Más adelante se discutirán técnicas mejores de predicción.

El cálculo del integral f(p,t) de la Ec.(105), puede calcularse fácilmente de la historia del yacimiento, de la cual se conocen una series de presiones p_i, p_1, p_2, p_3 ... p_n a los tiempos 0, t_1, t_2, t_3 ... t_n correspondientes. En esta forma a cada tiempo habrá una presión diferencial Δp, que puede definirse de varias maneras, tal como se explica en el Apéndice C, donde se deducen una serie de fórmulas para el cálculo del integeal f(p,t), teniendo en cuenta, además de la definición de Δp, si los intervalos de tiempo $\Delta t_j = (t_j - t_{j-1})$ en que se ha dividido la historia del yacimiento, varian o tienen un valor constante.

En general, el integral f(p,t) de la Ec.(105) puede calcularse por,

$$f(p,t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (2p_i - p_j - p_{j-1})\Delta t_j \qquad (108)$$

$$f(p,t) = p_i \sum_{j=1}^{n} \Delta t_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (p_{j-1} + p_j)\Delta t_j \qquad (109)$$

Cuando j=1, $p_{j-1} = p_o = p_i$ y $t_{j-1} = t_o = 0$. Si los intervalos de

tiempo son iguales, Δt_j = constante = Δt,

$$f(p,t) = \frac{\Delta t}{2}\left[(2n-1)pi - Pn - 2\sum_{j=1}^{n-1} p_j\right] \qquad (110)$$

Otras ecuaciones para el cálculo de f(p,t) se presentan en el Apéndice C.

Intrusión con Flujo Continuo-Modificado.- También se conoce como el método de Hurst Modificado[37]. En este caso, la rata de intrusión, además de ser proporcional a la caída de presión, (pi-p) es también función de tiempo. En forma simplificada, se expresa por,

$$e = \frac{dW_e}{dt} = \frac{C_h(pi-p)}{\log(at)} = \frac{C_h(pi-p)}{a' + \log(t)} \qquad (111)$$

integrando,

$$We = C_h \int_0^t \frac{(pi-p)dt}{\log(at)} = C_h \int_0^t \frac{(pi-p)dt}{a' + \log(t)} = C_h\ f(p,t) \qquad (112)$$

donde C_h es la constante de intrusión de agua de Hurst, generalmente expresada en bls/tiempo/lpc (donde tiempo puede ser días meses, trimestres, etc); f(p,t) es el valor del integral; a (o a' = log(a)) es una constante que depende de las unidades de tiempo; p_i y p fueron definidos en la Ec.(105).

Como puede observarse, en este caso se requiere el conocimiento de dos constantes, C_h y a (o a'). Para su determinación, se hace uso de los resultados obtenidos en el caso anterior. Si Cs varía en tal forma que la intrusión de agua no puede representarse por la fórmula de Schilthuis, tal información (Cs como función t) se usa para la determ

nación de C_h y a.

De la Ec.(111) puede escribirse,

$$\frac{\frac{dW_e}{dt}}{(pi-p)} = \frac{C_h}{\log(at)} = \frac{C_h}{a' + \log(t)} \qquad (113)$$

pero el lado izquierdo de esta ecuación es igual al valor de C_s de la Ec.(104). Por tanto,

$$C_s \log(a) + C_s \log(t) = C_h \qquad (114)$$

$$C_s a' + C_s \log(t) = C_h \qquad (115)$$

Ya que se C_s se conoce como función de t, los mejores valores de las constantes C_h y a' pueden determinarse por el método de los mínimos cuadrados[38]. Aplicando la Ec.(115) a cada uno de los tiempos, t_j, para los que se han calculado, C_{sj}, y sumando tales ecuaciones, se obtiene la denominada primera ecuación normal,

$$a' \sum_{j=1}^{n} C_{sj} + \sum_{j=1}^{n} (C_{sj} \log(t_j)) = nC_h \qquad (116)$$

Multiplicando cada una de las ecuaciones incluidas en la Ec.(115) por el t_j correspondiente y sumando como antes, se obtiene la denominada segunda ecuación normal,

$$a' \sum_{j=1}^{n} (C_{sj}\, t_j) + \sum_{j=1}^{n} (C_{sj}\, t_j \log(t_j)) = C_h \sum_{j=1}^{n} t_j \qquad (117)$$

Resolviendo simultaneamente las Ecs(116) y (117) se puede determinar C_h y a' (y por tanto a),

$$C_h = \frac{\sum_1^n C_{sj}\, t_j \sum_1^n C_{sj} \log(t_j) - \sum_1^n C_{sj} \sum_1^n C_{sj} \log(t_j)}{n \sum_1^n C_{sj}\, t_j - \sum_1^n C_{sj} \sum_1^n t_j} \qquad (11$$

$$a' = \frac{\sum_1^n t_j \sum_1^n C_{sj} \log(t_j) - n \sum_1^n C_{sj}\, t_j \log(t_j)}{n \sum_1^n C_{sj}\, t_j - \sum_1^n C_{sj} \sum_1^n t_j} = \log a \qquad (1$$

Una vez obtenidos los valores de C_h y a' (o a) se regresa a la Ec.(112) y se calcula We, conociendo p como función de t de la historia del yacimiento. Si los valores de We calculados en esta forma comparan favorablemente con los valores de We calculados por balance de materiales, la Ec.(112) represetna adecuadamente la intrusión de agua al yacimiento y podría calcularse luego We en el futuro, siempre y cuando se conozca p al tiempo futuro. En lugar de calcular We, y quizás sea más práctico, se puede verificar si las constantes C_h y a' representan adecuadamente la intrusión, calculando la rata de intrusión, e = dWe/dt, por la Ec.(111). Si este valor compara favorablemente con la rata de intrusión calculada por balance de materiales, al calcular C_s, Ec.(106) los valores C_h y a' (y a) se consideran satisfactorios y We puede calcularse a partir de la Ec.(112). Si los valores de e o We no comparan favorablemente, la intrusión debe expresarse en forma diferente.

Para el cálculo de We, es necesario determinar el integral de la Ec.(112). El Apéndice C incluye la deducción de fórmulas para el el cálculo de este integral, de donde se han tomado las siguientes,

$$f(p,t) = \frac{1}{2}\left[\frac{(pi-p_n)}{\log(at_n)}(t_n-t_{n-1}) + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{(pi-p_j)}{\log(at_j)}(t_{j+1}-t_{j-1})\right] \quad (120$$

donde $t_o = 0$. Si los períodos de tiempo son iguales, Δt_j = constante = Δt,

$$f(p,t) = 2\Delta t\left[\frac{(pi-p_n)}{\log(at_n)} + 2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(pi-p_j)}{\log(at_j)}\right] \quad (12$$

Intrusión con Flujo No-Continuo.- Generalmente se conoce como el método de van Everdingen y Hurst[7]. En este caso, la intrusión total de agua a un yacimiento se expresa por las ecuaciones discutidas anteriormente, Ecs.(93) y (95), para acuíferos lineales y radiales respectivamente,

$$We = \frac{\phi bhLc}{5,615}\sum_{j=1}^{n}\Delta p_j\, F_k[(t_n-t_{j-1})_D] \quad (9$$

$$We = 1,119\phi chR_i^2\,\frac{\theta}{360^\circ}\sum_{j=1}^{n}\Delta p_j\, Q[(t_n-t_{j-1})_D] \quad (9$$

donde $t_o = 0$. En general, estas ecuaciones pueden escribirse,

$$We = C_v\sum_{j=1}^{n}\Delta p_j\, Q[(t_n-t_{j-1})] = C_v\, f(p,t) \quad (12$$

donde la constante C_v (denominada comunmente B), está definida por:

Acuíferos Lineales,

$$C_v = \frac{\phi bhLc}{5,615}\ \text{barriles/lpc.} \quad (1$$

Acuíferos Radiales,

$$C_v = 1{,}119\phi chR_i^2 \frac{\theta}{360^o} \text{ barriles/lpc} \qquad (124)$$

donde c es la compresibilidad efectiva del acuífero, es decir, incluye además de la compresibilidad del agua, la compresibilidad de la formación ($c=c_w+c_f$). Si el acuífero es lineal $Q[(t_n-t_{j-1})_D]=F_k[(t_n-t_{j-1})_D]$

En la deducción de las Ecs.(93) y (95) se hizo referencia a la Fig.55, donde aparece la historia de presión (presión como función de tiempo) como una línea continua y en forma escalonada, con el fin de poder aplicar al principio de superposición discutido. En la práctica, se conocen una serie de presiones p_i, p_1, p_2 ... p_n a los tiempos 0, t_1, t_2 ... t_n. El método más común y posiblemente el más usado para obtener los decrementos de presión, Δp_j, es el propuesto por van Everdingen y otros[30], enunciado en la siguiente forma: la caída de presión a cualquier tiempo, puede tomarse como la mitad de la caída de presión en el intervalo anterior, más la mitad de la caída de presión en el intervalo posterior. Lógicamente, para la primera caída de presión, a mitad del intervalo anterior será cero. En forma analítica:

$$\Delta p_1 = 0 + \frac{1}{2}(p_i-p_1) = \frac{1}{2}(p_i-p_1)$$

$$\Delta p_2 = \frac{1}{2}(p_i-p_1) + \frac{1}{2}(p_1-p_2) = \frac{1}{2}(p_i-p_2)$$

$$\Delta p_3 = \frac{1}{2}(p_1-p_2) + \frac{1}{2}(p_2-p_3) = \frac{1}{2}(p_i-p_3)$$

$$\Delta p_4 = \frac{1}{2}(p_2-p_3) + \frac{1}{2}(p_3-p_4) = \frac{1}{2}(p_2-p_4)$$

$$\vdots$$

$$\Delta p_j = \frac{1}{2}(p_{j-2}-p_{j-1}) + \frac{1}{2}(p_{j-1}-p_j) = \frac{1}{2}(p_{j-2}-p_j)$$

Fig. 55.— Historia de presión de un yacimiento (contacto agua- petróleo) donde indica la presión escalonada.

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\Delta p_n = \frac{1}{2}(p_{n-2}-p_{n-1}) + \frac{1}{2}(p_{n-1}-p_n) = \frac{1}{2}(p_{n-2}-p_n) \qquad (125)$$

La Fig.55 ilustra las ecuaciones anteriores.

Los valores de Δp_j, también pueden obtenerse "a ojo", para lo cual se gráfica p como función de t y se traza una curva continua. Luego, "a ojo" se toman los Δp_j, de acuerdo a la forma de la curva tratando de compensar las pequeñas áreas triangulares que quedan por debajo y por encima de la curva al tomar cada Δp_j. Finalmente, se leen nuevos valores de p_j y t_j (j = 1, 2, 3, ... n).

La obtención de $F_k(t_D)$ y $Q(t_D)$ fué ampliamente discutida, de acuerdo al tamaño y condiciones iniciales y de límite impuestas al acuífero. Recuérdese que para acuíferos lineales y acuíferos radiales infinitos, los valores de $F_k(t_D)$ y $Q(t_D)$ se han determinado como función de t_D, Tablas I, IV y Figs. 10, 26 y 27; en cambio para acuíferos radiales finitos (limitados), $Q(t_D)$ es función de t_D y r_{eD}, Tablas VII y Figs. 35 a 39. Por tanto, la aplicación de la Ec.(122) exige conocimiento de: (1) tipo de acuífero: lineal o radial. (2) tamaño: infinito o finito, (3) si finito: acuífero cerrado o acuífero comunicado a una fuente de abastecimiento de agua. Por otro lado, la obtención del tiempo adimensional, t_D, requiere el conocimiento de una constante, Δt_D, para converitr tiempos reales a tiempos adimensionales:

Acuíferos Lineales,

$$t_D = \frac{0{,}006323kt}{\phi\mu cL^2} = \Delta t_D\, t \qquad (126)$$

Acuíferos Radiales,

$$t_D = \frac{0{,}006323kt}{\phi\mu c\ R_i^2} = \Delta t_D\ t \qquad (127)$$

Como puede observarse, tanto la constante C_V como Δt_D, requieren datos del acuífero: ϕ, c, R, (o L), valores comunes a C_V y Δt_D. Para acuíferos radiales, a medida que el producto $\phi c R_i^2$ aumenta, Δt_D disminuye y C_V aumenta. Por tanto, valores que definen a Δt_D, parcialmente definen a C_V. Además, los valores k y μ se encuentran en Δt_D, y h y θ (o b) se encuentran en C_V. La mayoría de esta información se conoce con poca exactitud o es necesario asumirse, a no ser que se perfore un pozo dentro del acuífero, con lo cual puede determinarse parte de tal información con mejor exactitud. Generalmente, ϕ, k y h se toman igual a los valores correspondientes promedios para la formación de la zona de petróleo; μ y c, se toman como los valores del agua de formación y muchas veces no se toma en cuenta la compresibilidad de la formación del acuífero; R_i, θ, b y L (este último valor para el caso de acuíferos limitados), se obtienen de acuerdo al tipo de estructura yacimiento-acuífero y del conociemiento del tamaño y forma del mismo. En esta forma, C_V y Δt_D, pueden calcularse de información conocida, pero tales valores deben tomarse como "valores guías", ya que los "valores verdaderos" es necesario determinarlos de la historia del yacimiento, es decir, C_V y Δt_D son incógnitas en la Ec.(122). Además, si el acuífero es radial y finito, debe conocerse el valor de r_{eD}, con el fin de evaluar $Q(t_D)$.

Para probar si W_e de la historia del yacimiento (W_e calculado por balance de materiales, en función de presión en el contacto agua - petróleo y tiempo), puede representarse por la Ec.(122), es necesario hacerse por ensayo y error (tanteo): en caso de que el acuífero pueda

considerarse infinito, se prueban diferentes valores de Δt_D y si el a - cuífero es finito (limitado) deben probarse diferentes valores de r_{eD}, y para cada uno de estos valores, probarse valores de Δt_D. La exactitud de estas constantes se verifica por la consistencia del valor de C_v, calculado por,

$$C_v = \frac{W_e \text{ (Balance de Materiales)}}{\sum_{j=1}^{n} \Delta p_j \; Q[(t_n - t_{j-1})_D]} \qquad (128)$$

Si esta razón permanece más o menos constante para determinados valores de Δt_D y r_{eD}, es porque W_e puede expresarse por la Ec.(122) y el mejor valor de C_v puede tomarse como un promedio de los valores calculados con la Ec.(126).

El procedimiento de análisis más recomendado es el siguiente: Si r_{eD} puede considerarse infinito o determinarse con suficiente exactitud, se calcula un valor aproximado de Δt_D con los datos conocidos (o conocidos y asumidos). Luego se toman valores mayores y menores de Δt_D y para cada uno de estos valores se calcula n valores de C_v de la Ec.(128). Se determinan un C_v promedio para cada valor de Δt_D,

$$C_{vp} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} C_{vj} \qquad (129)$$

y se calcula la desviación normal correspondiente,

$$\sigma = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (C_{vpj} - C_{vj})^2} \qquad (130)$$

Finalmente, se gráfica la desviación normal como función de los valores de Δt_D considerados y donde ocurra un mínimo en la σ, se toma co-

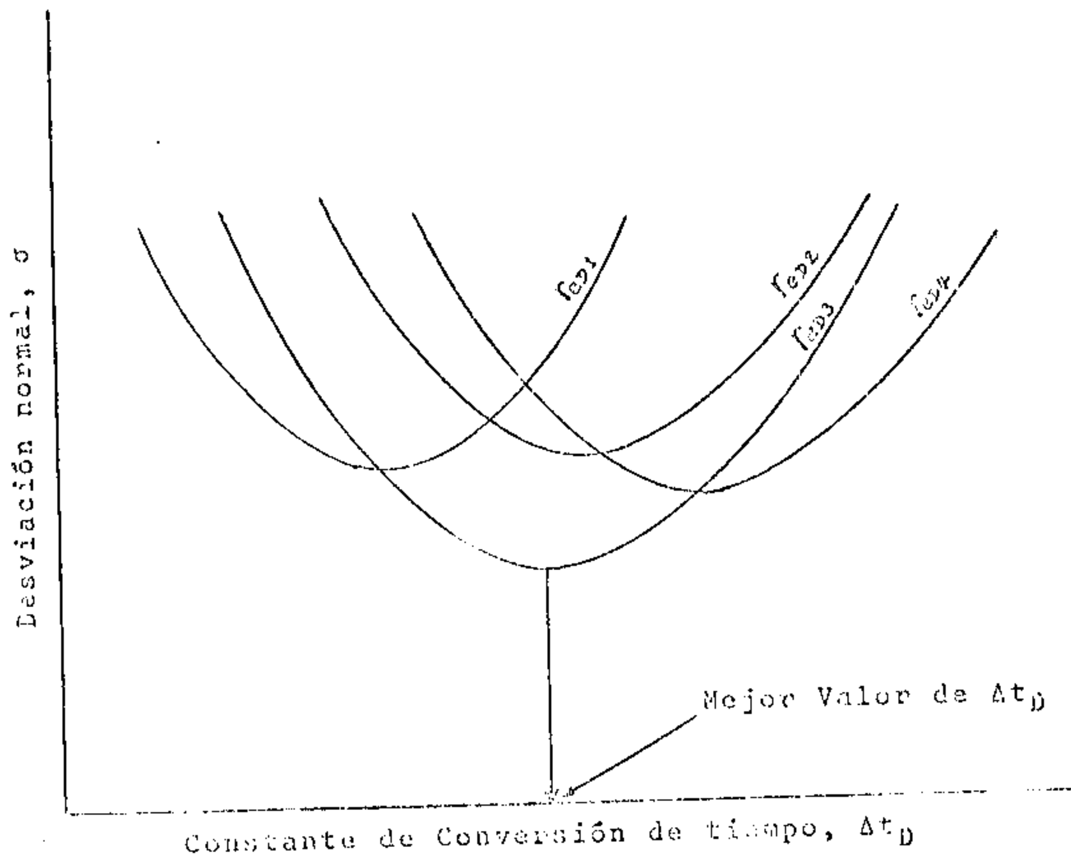


Fig.56 - Gráfico esperado de desviación normal, σ como Función de la constante de conversión, Δt_D, para determinar el mejor valor de Δt_D. Para cada curva, r_{eD} = constante.

mo el mejor valor de Δt_D, tal como ilustra la Fig.56. A veces puede ser más práctico graficar σ como función de $\log(\Delta t_D)$, ya que puede visualizarse mejor el mínimo de σ.

Con el mejor valor de Δt_D obtenido, se determina el C_{VD} correspondiente que será el mejor valor de C_V. Si no se conoce r_{eD}, se asumen diferentes valores y para cada r_{eD} asumido se hacen los cálculos indicados antes. Finalmente se tendrá un gráfico de σ como función de los valores de Δt_D considerados, una curva para cada valor de

r_{eD} asumido. La curva que presenta el mínimo valor de σ, será la del mejor r_{eD} y en el punto de mínimo se toma el Δt_D correspondiente como el mejor valor de Δt_D. Con este valor se regresa y se calcula el C_{vp} correspondiente, que será el mejor valor de C_v.

Análisis de la Historia si se Desconoce el Petróleo o Gas Originalmente en el Yacimiento.-

En este caso, habrá una incógnita más, o sea el valor de N. Como en el caso anterior, se hace uso de la ecuación de balance de materiales, pero en forma diferente. Esta ecuación se ordena en tal forma de agrupar los términos tal que se obtenga la ecuación de una línea recta. La pendiente de tal línea recta es la constante de intrusión, C_s, C_h o C_v y el intercepto, el valor de N. Las variables son cantidades que pueden calcularse de datos de presión y de producción. Una vez determinada la fórmula por la que va a expresarse la intrusión de agua tal que se cumpla la linearidad de la ecuación, los mejores valores de la constante de intrusión y del petróleo originalmente en el yacimiento, se obtienen por mínimos cuadrados[38].

Si se despeja N de la ecuación general de balance de materiales, Ec.(101), puede escribirse,

$$N = \frac{N_p\left[B_t + (R_p - R_{si})\, B_g\right] + W_p - W_e - W_i - G_i\, B_{ig}}{(B_t - B_{ti}) + mB_{ti}\left[\dfrac{B_g}{B_{gi}} - 1\right] + B_{ti}\, c_e(p_i - p)} \qquad (131)$$

donde c_e está dado por la Ec.(102). Si se define como D, el denominador de la ecuación anterior, puede escribirse,

$$N = \frac{N_p\left[B_t + (R_p - R_{si})B_g\right] + W_p - W_i - G_i B_{ig}}{D} - \frac{W_e}{D} \qquad (132)$$

Si además, se define,

$$Y = \frac{N_p\left[B_t + (R_p - R_{si})B_g\right] + W_p - W_i - G_i\ B_{ig}}{D} \qquad (133)$$

y el valor de W_e se expresa por,

$$W_e = C\ f(p,t) \qquad (134)$$

donde C puede ser C_s, C_h o C_v y f(p,t) son los valores correspondientes al integral en las Ecs.(105) y (112) o a la sumatoria de la Ec.(122). Por último si se define,

$$X = f(p,t)/D \qquad (135)$$

La Ec.(132) puede escribirse,

$$Y = CX + N \qquad (136)$$

Para yacimientos de petróleo no-saturados, Ecs.(97) y (100), puede escribirse,

$$N = \frac{N_p\ B_o + W_p - W_i}{(B_o - B_{oi})} - \frac{W_e}{(B_o - B_{oi})} \qquad (137)$$

$$N = \frac{N_p\ B_o + W_p - W_i}{B_{oi}\ c_e(pi-p)} - \frac{W_e}{B_{oi}\ c_e(pi-p)} \qquad (138)$$

donde c_e está dado por la Ec.(99). Si We se reemplaza por la Ec.(134) y se define,

$$Y = \frac{N_p\ B_o + W_p - W_i}{(B_o - B_{oi})} = \frac{N_p\ B_o + W_p - W_i}{B_{oi}\ c_e(pi-p)} \qquad (139)$$

$$X = \frac{f(p,t)}{(B_o - B_{oi})} = \frac{f(p,t)}{B_{oi}\ c_e(pi-p)} \qquad (140)$$

Las Ecs.(137) y (136), pueden expresarse por la Ec.(136).

Finalmente, para yacimientos de gas, Ec.(103),

$$G = \frac{G_p\ B_g + W_p - W_i}{\left[\dfrac{B_g}{B_{gi}} - 1\right]} - \frac{W_e}{\left[\dfrac{B_g}{B_{gi}} - 1\right]} \tag{141}$$

Si se reemplaza W_e por la Ec.(134) y definiendo,

$$Y = \frac{G_p\ B_g + W_p - W_i}{\left[\dfrac{B_g}{B_{gi}} - 1\right]} \tag{142}$$

$$X = \frac{f(p,t)}{\left[\dfrac{B_g}{B_{gi}} - 1\right]} \tag{143}$$

La Ec.(141) puede escribirse,

$$Y = CX + G \tag{144}$$

Esta ecuación es similar a la Ec.(136), excepto que aparece G en lugar de N. Por tanto, cualquiera que sea de tipo de yacimiento, la ecuación de balance de materiales puede expresarse por medio de una linea recta. Los valores de C y N o G son constantes; el valor de Y es función de datos de producción : N_p, G_p, R_p, W_p; de datos de inyección:W_i, G_i, B_{ig}; de presión (datos PVT) : Bti, Boi, Bt, B_{gi}, B_g, R_{si}; del tamaño de la capa de gas, m; de la saturación de agua connata, S_w y de las compresibilidades de la formación y del agua de formación, c_p y c_w, en la zona de petróleo. A su vez, producción y presión son funciones de tiempo

Por tanto, Y es función de tiempo. El valor de X depende del tamaño de la capa de gas, saturaci´on de agua, compresibilidades, presión (datos PVT), f(p,t), el que a su vez depende tiempo y datos específicos de acuerdo al tipo de intrusión, según se discutió anteriormente. En esta forma, para cada tiempo de la historia del yacimiento pueden calcularse valores de Y y X. Aplicando estos valores a la Ec.(136) o (144) pueden calcularse los valores de C y N o G.

Al igual que en el caso en que N es conocido, a continuación se presenta un analísis para la determinación de C y N, de acuerdo al tipo de intrusión.

Intrusión con Flujo Continuo.- La intrusión de agua se expresa por la Ec.(105). El valor del integral f(p,t) de esta ecuación, se calcula a partir de la historia de presión por las Ec.(108) a (110) u otras ecuaciones, tal como se explica en el Apéndice C. A cada tiempo de la historia se calcula un valor de Y y X. El mejor valor de C (C_s) N o G, se obtienen aplicando mínimos cuadrados, según las ecuaciones deducidas en el Apéndice D,

$$C = \frac{n \sum_1^n X_j Y_j - (\sum_1^n X_j)(\sum_1^n Y_j)}{n \sum_1^n X_j^2 - \left[(\sum_1^n X_j)\right]^2} \qquad (145)$$

$$N \ (o\ G) = \frac{1}{n}\left[\sum_1^n Y_j - C \sum_1^n X_j\right] \qquad (146)$$

En lugar de la Ec.(145) puede usarse la Ec.(5D) del Apéndice D. Además, se recomienda al calcular los mejores valores de C y N o G, tomar el promedio de los valores calculados aplicando mínimos cuadrados,

primero considerando línea de regresión de Y sobre X y luego línea de regresión de X sobre Y, según ecuaciones incluídas en el Apéndice D.

Una vez calculado el mejor valor de C y N o G se regresa y se calcula W_e por balance de materiales y por la Ec.(105) de Schilthuis y se comparan los valores. Si comparan favorablemente dentro de los límites de error permisibles, la intrusión de agua sigue flujo continuo y los valores de C y N o G calculados representan para el yacimiento, la constante de intrusión de agua de Schilthuis y el valor de petróleo o gas originalmente en el yacimiento. Si los valores de W_e varían mucho uno del otro, la intrusión de agua no sigue flujo continuo.

El análisis de este tipo de intrusión puede hacerse en forma diferente y quizás sea la forma más práctica, especialmente si los cálculos se hacen manualmente (calculadoras de escritorio). Es el método de Graficaciones Sucesivas, sugerido por Havlena y Odeh[40]. Una vez calculados los valores de Y y X se gráfican en papel normal. En esta forma se imparte un significado dinámico a cada punto calculado, ya que dependiendo de la forma del gráfico resultante, puede concluirse respecto al yacimiento (tipo, tamaño) y a los valores que deben variarse para continuar el análisis. Si el gráfico resultante es una línea recta o muy cercana a ella, se calculan los mejores valores de C y N o G por mínimos cuadrados y se chequean con los valores obtenidos del gráfico, ya que la pendiente es igual a C y el intercepto es igual a N o G. Si los puntos se apartan mucho de una línea recta, la intrusión no sigue flujo continuo y debe considerarse otro tipo de intrusión.

A veces el acuífero es muy pequeño y la intrusión de agua puede expresarse por[40],

$$W_e = C'(pi-p) \qquad (147)$$

donde $C' = Wc_w$ y W = volumen de agua en el acuífero. En este caso, para el cálculo de X se usa (pi-p) en lugar de f(p,t) y el gráfico de Y contra X se analiza en forma similar. Si ocurre linearidad, se determina C' y N o G por mínimos cuadrados y se compara con los valores obtenidos del gráfico. Del valor de C' puede determinarse el volumen de agua del acuífero, W.

El sentido de variación de Y y X en este caso ocurre en forma diferente. El valor de X disminuye a medida que la presión disminuye, o sea, a medida que el tiempo aumenta. Esto es debido a que el denominador de Y y X aumenta más rápido que (pi-p) a medida que p disminuye y ya que C' es siempre positivo (pendiente de la línea recta), luego Y debe disminuir a medida que la presión disminuye. En esta forma los puntos del gráfico varían en sentido inverso, o sea que Y y X disminuyen a medida que p disminuye (tiempo aumenta).

De lo anterior puede concluirse que el acuífero es muy pequeño y se calcula N o G a partir de la ecuación de balance de materiales (We se considera igual a cero), el valor aparente de N o G calculado (realmente se calcula el valor de Y) disminuye con tiempo. En la práctica puede ocurrir que el comienzo de la intrusión el comportamiento del acuífero siga flujo no-continuo, la variación de Y y X sea normal, es decir, aumentan con tiempo, y luego, si cumple la Ec.(147), los valores de Y y X disminuyen con tiempo. El punto de cambio de pendiente ocurre al cambiar de flujo no-continuo a continuo.

Intrusión con Flujo Continuo-Modificado.- La intrusión se expresa por la Ec.(112) y para el cálculo del integral f(p,t) de esta ecuación

además de requerir la historia de presión, es necesario conocer el valor de la constante de conversión de tiempo a . El Procedimiento de calculado es el siguiente:

(1) - Se calculan valores de Y para los tiempos en que existe historia del yacimiento, Ecs.(133), (139) o (142).

(2) - Para un valor considerado (determinado aproximadamente en la forma indicada más adelante) de la constante a , se calculan valores de X para los mismos tiempos en que se calculó Y.

(3) - Se repite el Paso (2) para otros valores asumidos de a

(4) - Para cada valor de a , se obtienen los mejores valores de C y N o G por mínimos cuadrados, Ecs.(145) y (146). Apéndice D.

(5) - Para cada valor de a , con los mejores valores de C y N o G obtenidos en (4) y los valores de X calculados en (2) y (3), se calculan una serie de valores de Y_c por la Ec.(136), o (144).

(6) - Para cada valor de a y los valores de Y calculados en (1) y Y_c calculados en (5), se determina la desviación normal, y el porcentaje de desviación normal, % σ,

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{1}^{n} (Y_j - Y_{cj})^2} \qquad (148)$$

$$\%\sigma = 100\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \left[\frac{Y_j - Y_{cj}}{Y_j}\right]^2} \qquad (149)$$

(7) - Se grafican los valores de σ (o %σ) como función de a . El valor de a correspondiente a la desviación normal mínima, es el

mejor valor de a para el acuífero. Dependiendo del intervalo de variación de a , puede graficarse el valor de a' (log(a)) como función de σ, obteniéndose un mínimo mejor definido. Sea cual fuere el gráfico, la forma de la curva resultante es del tipo ilustrado en la Fig.56.

Para determinar los mejores valores de C y N o G, se gráfican estos valores como función de σ y donde ocurra el mínimo valor de σ, se leen los mejores valores de C (C_h) y N o G. Es también recomendado graficar C y N o G contra tiempo real y analizar su variación. Los mejores valores de C y N o G deben presentar la mínima variación con tiempo.

(8) Finalmente, con el mejor valor de N o G se calcula W_e por balance de materiales y con los mejores valores de Ch y a (o a') se calcula también W_e por la Ec.(112) de Hurst Modificada. Si estos valores chequean satisfactoriamente, la intrusión de agua puede representarse por la Ec.(112); de lo contrario, la intrusión no sigue condiciones de flujo continuo-modificado.

La primera aproximación del valor de a , puede obtenrse a partir de los resultados al analizar la historia del yacimiento para flujo continuo. De este análisis se toma el valor de N o G y se calcula el valor de a por el método discutido en caso de conocer N o G. Con valores de a mayores y menores al obtenido en esta forma, se calcula el Paso (3).

El caso de flujo continuo modificado, también puede analizarse por graficaciones sucesivas de Havlena y Odeh. Se calculan los Pasos (1) y (2) del procedimiento anterior, se gráfica Y (ordenada) como función de X y se analiza la curva resultante. Si indica una línea re-

ta, se calcula C (C_h) y N por mínimos cuadrados para el valor correspondiente de a . Si presenta curvatura hacia abajo, el valor de a es muy grande y si la curvatura es hacia arriba el valor de a es muy pequeño, Fig.57. En esta forma, modificando el valor de a , se repite el Paso (2), se gráfica de nuevo y asi sucesivamente hasta obtener la mejor linea recta. Finalmente se obtienen los mejores valores de C (C_h) y N o G y se prueban si estos valores representan adecuadamente el acuífero, según el Paso (8). Puede suceder que el gráfico resultante no presente uno de los tipos de curva mencionados, sino otra forma caprichosa. Tal situación puede deberse a uno o varias de las siguientes razoanes: (1) datos errados, (2) cálculos errados y (3) el acuífero no se comporta según este tipo de intrusión. En tal caso se recomienda analizar la historia considerando flujo no-continuo.

En general, este método de flujo continuo-modificado es poco usado en la práctica y directamente en el análisis de un yacimiento consideran flujo no-continuo. Sin embargo, ya que la intrusión W_e, es función de presión y de tiempo, en este aspecto se asemeja el flujo no-continuo, discutido a continuación. Además es lógico suponer, que si un yacimiento cumple flujo continuo-modificado, con mayor razón se espera que cumpla flujo no-continuo. Esta puede ser una de las causas por las cuales no sea muy usado en la práctica.

Intrusión con Flujo No-Continuo.- Este caso es bastante similar al caso anterior ya que la sumatoria f(p,t) de la Ec.(122), igualmente depende de una constante de conversión de tiempo Δt_D, según se discutió anteriormente. Además el valor de f(p,t) depende del radio adimensional r_{eD}. El método más común de análisis de este caso se debe a van Everdingen, Timmerman y McMahon[39], y generalmente se conoce co

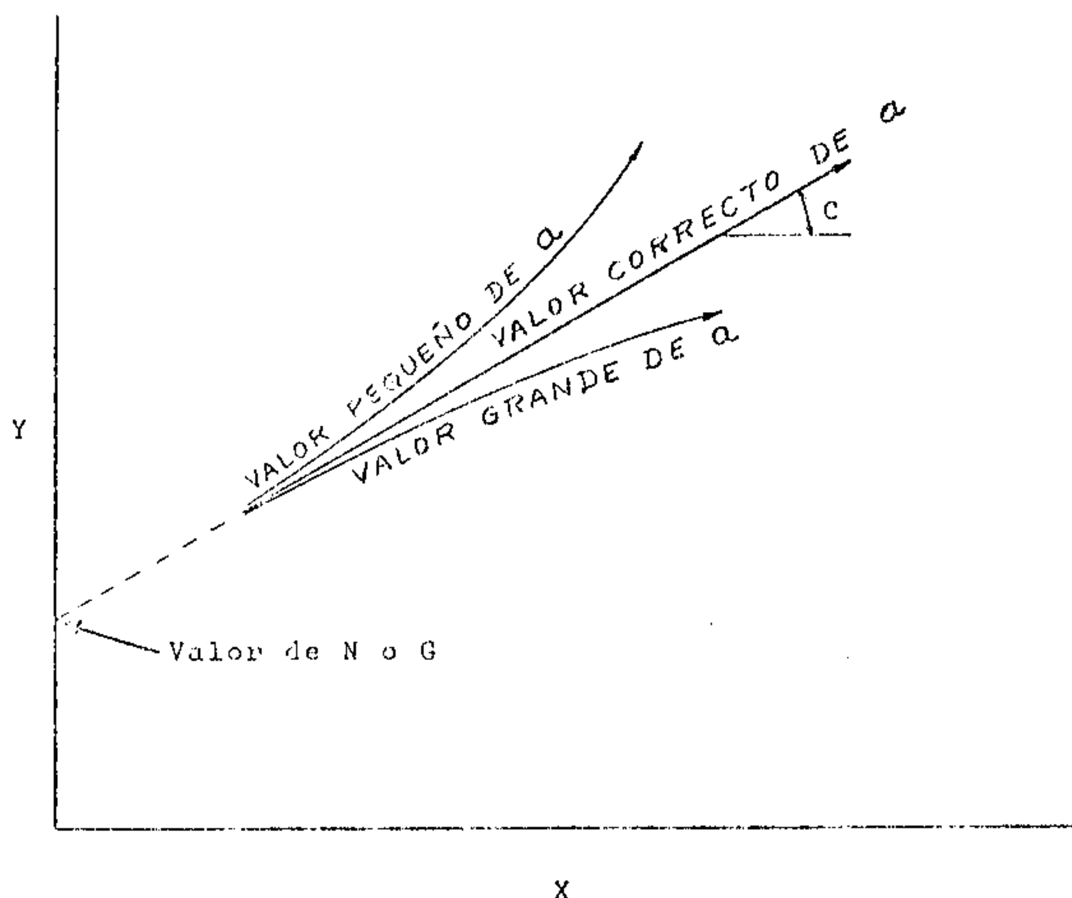


Fig.57 - Curvas típicas de Y como función de X para diferentes valores de a en el análisis de intrusión de agua con flujo continuo-modificado.

mo método de VTM. El método sugerido por Havlena y Odeh[40] es tambien muy usado. McEwen[41] y Stanley[42] presentan formas diferentes de análisis de este caso. Debido a que en un yacimiento determinado puede adaptarse mejor un método que otro, los métodos mencionados serán discutidos comenzando por el método VTM.

Método VTM.- Este método se adaptó al análisis del caso anterior de flujo continuo-modificado, donde f(p,t) solo depende de una constante de tiempo, a (o a'). En caso de flujo no-continuo, f(p,t) dependerá solo de Δt_D en acuíferos infinitos y además de r_{eD} en acuíferos finitos.

Si se trata de acuíferos infinitos donde $f(p,t)$ depende solo de Δt_D, este valor se calcula aproximadamente con la mejor información conocida del campo de acuerdo a su definición, Ecs.(126) y (127). Se toman valores de Δt_D menores y mayores al valor calculado. La variación de Δt_D depende del criterio individual y de la exactitud de la información del campo usada para el cálculo inicial de Δt_D. Una vez seleccionados los valores de Δt_D, se efectuan los Pasos (1) al (7) del procedimiento explicado en el caso anterior, tomando Δt_D en lugar de a , y por supuesto, el valor de C obtenido, será la constante de intrusión de van Everdingen y Hurst, C_v. El Paso (8) se modifica en la siguiente forma:

(8) - Los mejores valores de Δt_D y C_v obtenidos en el Paso anterior, pueden comprobarse multiplicándolos entre si y comparando este producto con el valor obtenido de datos de campo de acuerdo a sus definiciones, Ec.(124)xEc.(127),

$$(\Delta t_D)(C_v) = \frac{(1,119)(0,006323)kh\theta^o}{360\ \mu} \tag{150}$$

$$(\Delta t_D)(C_v) = \frac{(19,65x10^{-6})kh\,\theta^o}{\mu} \tag{151}$$

Si $kh\theta^o/\mu$ se conoce con un buen grado de exactitud, esta relación contribuye a un chequeo de Δt_D y C_v.

Si no ocurre error en los cálculos y la información es representativa del campo, se considera que los valores de las constantes Δt_D y C_v representan adecuadamente la intrusión de agua. El paso final consiste en corregir (ajustar), si es necesario, los datos de presión de la historia del yacimiento, calculando W_e tanto por balance de

materiales, como por la ecuación de van Everdingen y Hurst, en tal forma que los valores de W_e calculados por ambos métodos, varíe dentro de una aproximación normal. Las presiones corregidas serán las usadas en el resto de los cálculos del yacimiento. Es entendido que si la intrusión calculada por ambos métodos varía demasiado, puede ocurrir que la información del yacimiento o los cálculos estén errados.

Si el valor de r_{eD} es desconocido, es necesario asumir valores de esta constante y para cada valor de r_{eD} repetir los Pasos (1) a (7) descritos. Para cada valor de r_{eD} se grafica σ como función de Δt_D (o $\log(\Delta t_D)$), C_V y N o G. La curva que presente la mínima desviación normal, en este punto se leen los mejores valores de Δt_D, C_V y N o G. El valor de r_{eD} correspondiente será el mejor valor de r_{eD}. Finalmente se efectua el Paso (8) anterior.

Método de Havlena y Odeh.- En forma similar a los casos anteriores, la intrusión de agua con flujo no-continuo puede analizarse por el método de graficaciones sucesivas de Havlena y Odeh[40]. Una vez calculados los valores de Y y X se grafican en papel normal. De acuerdo a la forma de la curva resultante, puede continuarse el análisis en forma lógica. La Fig.58 presenta dos casos principales que pueden resultar. Además de estos casos, puede ocurrir que los puntos fraficados se presenten en forma desordenada, lo que indica que los cálculos, la historia del yacimiento, o ambas cosas, estén errados.

Si los puntos graficados presentan una línea recta, Curva D, es porque las constantes r_{eD}, C_V y N o G son correctas. Los mejores valores de C_V y N o G, pueden obtenerse por mínimos cuadrados y tambien del mismo gráfico (pendiente = C_V; intercepto = N o G) para los valores de Δt_D y r_{eD} correspondientes. Si los puntos presentan curvatura hacia

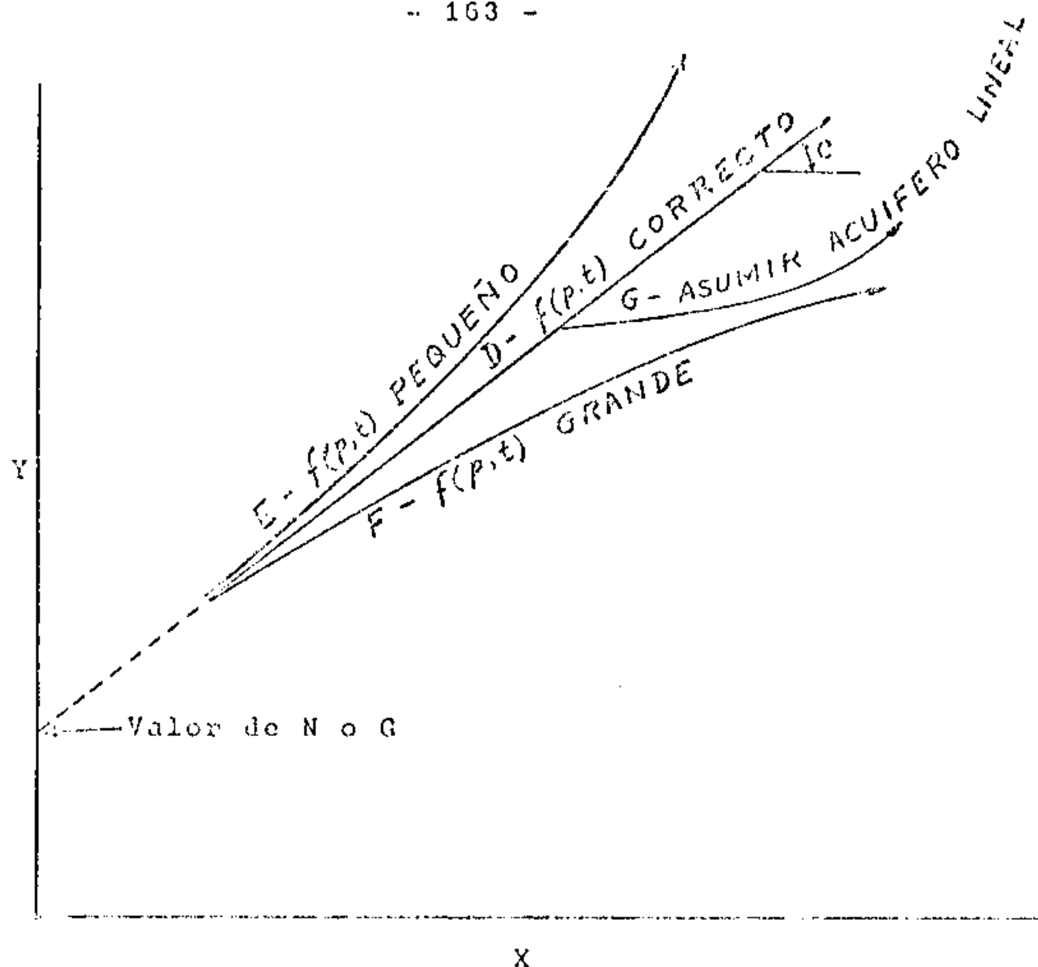


Fig.58 - Curvas típicas de Y como función de X para diferentes valores de la sumatoria f(p,t) en el análisis de intrusión de agua con flujo no-continuo.

arriba, Curva E, o hacia abajo, Curva F, indica que el valor de f(p,t) es muy pequeño o muy grande respectivamente. Esto a su vez, indica que el valor de r_{eD}, Δt_D, o ambos, son bajos o altos. Por tanto, deben aumentarse o disminuirse según el caso y repetir los cálculos con estos nuevos valores y así sucesivamente hasta obtener la mejor línea recta. De nuevo, C_v y N o G se calculan por mínimos cuadrados y se verifican del gráfico para los valores de Δt_D y r_{eD} correspondientes. Finalmente, si los puntos presentan una curvatura en forma de S, Curva G, indica que el acuífero puede representarse mejor por un sistema lineal.

Con el fin de saber el sentido de variación de los valores de Δt_D y r_{eD} en caso de obtener curvatura hacia abajo o hacia arriba, Fig. 58, debe tenerse presente la forma de las curvas de $Q(t_D)$ contra t_D, Figs.35 a 46 (acuíferos cerrados). Por ejemplo, si se fija r_{eD} y se varía Δt_D, debe observarse que para que intervalo de valores de t_D ocurre el máximo de variación de $Q(t_D)$ con el fin de aumentar o disminuir f(p,t) de acuerdo a la curvatura. Por ejemplo, para r_{eD} = 15, Fig.39, la máxima rata de aumento de $Q(t_D)$ ocurre para $100 \leq t_D \leq 500$, $Q(t_D)$ contra t_D se va haciendo mas y mas horizontal hasta alcanzar un valor constante (flujo continuo) de 112,0 para t_D = 1000,0. Si para el Δt_D considerado, los t_D calculados caen en su mayoría por encima de 500, ocurre un aumento muy pequeño de f(p,t) y entonces Δt_D debe disminuirse. Lo contrario debe hacerse si la mayoría de los t_D fueron menores de 100, es decir, Δt_D debe aumentarse. En resumen, una vez fijo r_{eD}, debe examinarse muy cuidadosamente la curva de $Q(t_D)$ contra t_D correspondiente, con el fin de determinar si Δt_D debe aumentarse o disminuirse para obtener linealidad en el gráfico de Y contra X.

La curvatura tambien puede corregirse fijando el valor de Δt_D y variando r_{eD}. Si se aumenta este valor, equivale a aumentar mas rápidamente el valor de $Q(t_D)$ - y por consiguiente el valor de f(p,t) - a tiempos mayores que a tiempos menores, trayendo como consecuencia la corrección de la curvatura que se presenta hacia arriba. Si se disminuye r_{eD}, ocurre lo contrario.

De la discusión anterior puede concluirse que varias combinaciones de Δt_D y r_{eD} pueden proporcionar una línea recta y presentar la solución correcta. En estos casos, para determinar los mejores valores de Δt_D y r_{eD} debe hacerse uso de pruebas estadísticas: "prueba de consis

tencia", explicada mas adelante, e "intervalo de confidencia"[43].

En algunos yacimientos, el gráfico de σ como función de Δt_D (o $\log(\Delta t_D)$) no presenta un mínimo definido, sino un intervalo de Δt_D donde el valor de σ varía relativamente poco. Esto se debe a que el yacimiento es incensitivo a cambios de Δt_D y en este caso, la obtención de este valor es solo de interés académico. Sin embargo, en algunos casos se recomienda la "prueba de consistencia"[43]: se toman varios valores de Δt_D alrededor del punto de σ mínimo; para cada Δt_D se grafica C_v y N o G como función de tiempo real y a cada gráfico, por mínimos cuadrados se determina la mejor línea recta y su pendiente. Estas pendientes se grafican como función de Δt_D en papel normal. La intersección de las curvas resultantes, corresponde al valor más probable de Δt_D. Teóricamente, debe ocurrir la intersección para una pendiente igual a cero, ya que si los valores de r_{eD} y Δt_D son correctos, C_v y N o G no deben variar con tiempo y la pendiente debe ser igual a cero.

En el análisis de intrusión de agua, el valor de m es cero, se asume o se conoce con razonable exactitud. Havlena y Odeh[40], discuten el caso en que el valor de m sea una nueva incógnita y describen la forma de resolver el problema. Al mismo tiempo hacen énfasis en que este caso requiere datos de extraordinaria exactitud, principalmente datos de presión. Además, el método requiere conocer derivadas respecto a presión de determinados factores, lo que contribuye aún mas a disponer de datos de extrema exactitud. Por ejemplo, se requiere la derivada respecto a presión de (B_t-B_{ti}), (B_g-B_{gi}), etc. Esto hace que en la práctica este método tenga muy poco uso.

<u>Metodo de McEwen[41]</u>.- El método de van Everdingen,Timmerman y McMahon - método VTM - discutido anteriormente, no trabaja cuando existe error

en los datos de presión, aún en el caso en que tal error sea pequeño. MaEwen modifica el método de VTM, proporcionando resultados satisfactorios, incluyendo el caso en que los datos de presión presentan dudas respecto a su exactitud.

En este método la ecuación de balance de materiales se arregla en tal forma de obtener la ecuación de una línea recta que parta del origen, Y = aX.

Si la Ec.(132), para yacimientos de petróleo saturado, se multiplica por D/N, el término W_e se pasa al lado izquierdo, se reemplaza por la Ec.(134) y además se define,

$$Y = D + \frac{C}{N} f(p,t) \tag{152}$$

$$X = N_p\left[Bt + (R_p - R_{si})B_g\right] + W_p - W_i - G_i B_{ig} \tag{153}$$

$$a = \frac{1}{N} \tag{154}$$

puede escribirse,

$$Y = aX \tag{155}$$

Para yacimiento de petróleo no-saturados, las Ecs.(137) y (138) pueden arreglarse en forma similar y expresarse en la forma de la Ec.(155). En este caso,

$$Y = (B_o - B_{oi}) + \frac{C}{N} f(p,t) \tag{156}$$

$$Y = B_{oi}\, c_e(pi - p) + \frac{C}{N} f(p,t) \tag{157}$$

$$X = N_p B_o + W_p - W_i \qquad (158)$$

$$a = \frac{1}{N} \text{ (igual a Ec.(154))}.$$

Finalmente, en forma similar, para yacimientos de gas, la Ec.(141) también puede expresarse en la forma de la Ec.(155) En este caso,

$$Y = \left[\frac{B_g}{B_{gi}} - 1\right] + \frac{C}{G} f(p,t) \qquad (159)$$

$$Y = G_p B_g + W_p - W_i \qquad (160)$$

$$a = \frac{1}{G} \qquad (161)$$

Como puede observarse de las ecuaciones anteriores el valor de Y contiene los términos con posibilidad de error mayor, especialmente si el error ocurre en la presión, ya que todos sus términos, excepto C/N o C/G y m (en caso de que exista capa de gas inicial) son funciones de este valor. Además contiene términos que son diferencias en factores volumétricos, muy sencibles a presión. Por otro lado, X contiene términos de producción (e inyección en caso de que exista), generalmente conocidos con mayor exactitud.

El valor de C/N para el caso de flujo no-continuo, puede calcularse aproximadamente si se conocen los valores de compresibilidad, saturación de agua connata y factor volumétrico inicial del petróleo. Reemplazando a C_v de su definición, Ecs(123) y (124) y a N de la Ec. (96):

Acuíferos Radiales,

$$\frac{C}{N} = \frac{2 c_e B_{oi} \; \theta^o}{360 \; (1-S_w)} \tag{162}$$

Acuíferos Lineales,

$$\frac{C}{N} = \frac{c_e B_{oi}}{(1-S_w)} \tag{163}$$

Para yacimientos de gas pueden deducirse ecuaciones similares para C/G. Basta cambiar B_{oi} por B_{gi}.

El procedimiento de cálculo puede resumirse en los siguientes pasos:

(1)-Se calcula el valor de C/N o C/G de una de las ecuaciones anteriores. Si se dispone de datos suficientes, se calcula aproximadamente un valor de la constante Δt_D por la Ec.(126) o (127); de lo contrario debe asumirse. El valor de r_{eD} se conoce o se asume. Con los valores de C/N o C/G y Δt_D, para un determinado r_{eD}, se calcula una serie de valores de Y y X de la historia del yacimiento (un valor para cada tiempo), usando las Ecs.(152) y (153), Ecs.(156) y (157) o Ecs.(159) y (160), de acuerdo al tipo de yacimientos. Aplicando mínimos cuadrados, se calcula el valor de a,

$$a = \frac{1}{N} \text{ o } \frac{1}{G} = \frac{\sum_{1}^{n}(X_j Y_j)}{\sum_{1}^{n}(X_j)^2} \tag{164}$$

(2)-Con el valor de a obtenido del paso anterior y para cada valor de X se calcula un valor de Y_c, de la ecuación Y = aX. Con estos valores y los valores de Y calculados en el paso anterior, se cal-

cula la "Suma Normalizada" del cuadrado de las diferencias de los valores de Y, dada por,

$$SSDn = \frac{\sum_{1}^{n} (Y_j - Y_{cj})^2}{Y_{max}^2} \qquad (165)$$

donde Y_{max} es el valor máximo de Y calcúlado en el paso anterior.

(3)-Se asumen otros valores de Δt_D (valores mayores y menores del valor calculado aproximadamente) y se repiten los Pasos 1) y 2). Se grafica SSD_n y $\frac{1}{a}$ (N o G) como función de Δt_D. Donde ocurra el mínimo en el valor de SSDn se leen los mejores valores de Δt_D y N o G para el r_{eD} considerado.

(4)-Si r_{eD} es desconocido, se asumen diferentes valores de r_{eD} y se repiten los Pasos 1) a 3). La curva que presenta el SSDn mínimo en este punto se toma el mejor valor de Δt_D, N o G y el r_{eD} correspondiente.

(5)-Se calcula el mejor calor de C, a partir del mejor valor de N o G obtenido y del valor de C/N calculado en el Paso 1).

Como puede observarse el cambio primordial en este método respecto al método VTM consiste en que limita el análisis por mínimos cuadrados a la determinación de N o G, Δt_D y r_{eD}. La constante C se toma luego proporcional a N o G ya que C/N o C/G se calcula independientemente. Por tanto, la exactitud de los resultados, dependerá del conocimiento exacto de los factores volumétricos iniciales, B_{oi}, o B_{gi}, de la compresibilidad del agua y de la saturación de agua en la zona de petróleo. Además, en el caso de yacimiento radiales, entra el valor de

θ, o ángulo de la circunferencia sobre la cual actúa el acuífero.

Método de Stanley[42] . - Este método, como los anteriores, permite calcular el petróleo o gas originalmente en el yacimiento y la constante de intrusión, a través de un proceso de ensayo y error (tanteo). Utiliza las mismas ecuaciones de VTM, pero en este caso el término de intrusión, W_e, se expresa por la ecuación,

$$W_e = C \sum_{j=1}^{n} \Delta p_j \; (n+1-j)^m \qquad (166)$$

El valor $Q[(t_n-t_{j-1})_D]$ de la Ec.(122) se ha reemplazado por $(n+1-j)^m$, donde j es un número entero que varía entre 1 y n (número de periodos considerados en la historia del yacimiento); m es un exponente que varía entre 0,5 y 0,8. El valor de C, es igual a la de la Ec.(122), multiplicada por la constante $(\Delta t_D \; \Delta t)^m$, donde Δt_D es la constante de conversión de tiempo dimensional a tiempo adimensional y Δt es el valor del intervalo en que se ha dividido el tiempo de la historia del yacimiento. El método asume que el tiempo se divide en periodos de igual duración.

Como se discutió anteriormente, $Q(t_D)$ es función de t_D. Stanley consideró,

$$Q(t_D) = t_D)^m \qquad (167)$$

Pero, $t_D = (\Delta t_D)(t)$ y a su vez, $t = (i)(\Delta t)$, luego,

$$Q(t_D) = (\Delta t_D \; \Delta t)^m \; (i)^m \qquad (167a)$$

$$Q(t_D) = (\text{constante})(i)^m \qquad (167b)$$

donde i = número de períodos. La cosntante = $(\Delta t_D \; \Delta t)^m$ se ha incluído junto con el valor de C de la Ec.(122). Por tanto, al determinar el valor de C de la Ec(166) debe tenerse en cuanta esta constante.

La historia del yacimiento se divide en períodos de igual duración 1, 2, ... j ... n. Al aplicar el principio de superposición para el cálculo de W_e, se toma el Δp_1 y el $Q(t_D)$ máximo, el Δp_2 y el $Q(t_D)$ que sigue en orden descendente, etc. Por tanto, el Δp_1 se tomará con $(n)^m$, el Δp_2 con el $(n-1)^m$, etc. Por esta razón, en la Ec.(166) aparece el término $(n+1-j)$ en lugar de i de la Ec.(167b).

En forma similar a los casos anteriores,

$$f(p,t) = \sum_{j=1}^{n} \Delta p_j \; (n+1-j)^m \qquad (168)$$

$$W_e = C \; f(p,t) \qquad (134)$$

Stanley usa el mismo arreglo de las ecuaciones de balance de materiales de VTM en línea recta deducido anteriormente, Ecs.(136) y (144) y de acuerdo al tipo de yacimiento considerado; yacimientos de petróleo no - saturados y saturados y yacimiento de gas,

$$\underline{Y} = CX + N \qquad (136)$$

$$Y = CX + G \qquad (144)$$

Los valores de Y tienen la misma definición de las Ecs.(133), (139) y (142) y X la misma definición de las Ecs.(136), (140) y (143) pero teniendo en cuenta que para f(p,t) se usa la nueva definición, Ec.(168).

El procedimiento de cálculo puede resumirse en los siguientes pasos:

(1)-Se divide la historia del yacimiento en un número, n, adecuado de iguales incrementos de tiempo y se numeran ascendente, 1, 2, 3, ... j ... n.

(2)-Se calculan las caídas de presión de acuerdo a la Ec. (125).

(3)-Se calcula f(p,t) de acuerdo a la Ec.(168) para m = 0,5 y m = 0,8.

(4)-Se Calcula Y y X para cada período.

(5) Se asumen valores de N o G. Para cada N o G asumido se calculan una series de valores de C (uno para cada período), tanto para m = 0,5 como m = 0,8.

(6)-Se gráfica C como función de tiempo; una curva para cada N o G asumido y para cada m = 0,5 y 0,8. De estos gráficos puede deducirse si el valor de N o G verdadero está comprendido entre los valores asumidos, observando si ocurre cambio de inflexión de las curvas, es decir, cambio de curvatura hacia arriba a curvatura hacia abajo, a medida que N o G aumentan. En caso de que se tenga previamente un estimado de N o G y además se conozca que el acuífero es infinito, este paso puede eliminarse, pues estamos seguros que en el intervalo de valores asumidos de N o G está correcto.

(7)-Para cada N o G asumido se calcula el promedio arimético de C, denominado C_p, y se calcula la desviación normal correspondiente

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (C_p - C_j)^2} \qquad (169)$$

Se gráfica σ como función de N o G tanto para m = 0,5 como m = 0,8 y donde ocurra el mínimo de desviación normal allí se toma el mejor valor de N o G y m. El mejor valor de C, será el C_p calculado para los mejores valores de N o G y m obtenidos.

Debe tenerse presente en el Paso 5) que los valores de C calculados al comienzo de la historia del yacimiento pueden ser muy diferentes de los calculados para el resto de la historia. Este comportamiento puede deberse a que al comienzo de la historia, la intrusión no siga exctamente la Ec.(166) o porque la presión no sea exactamente la que ocurre en el contacto agua-petróleo, etc. En tales casos se recomienda no tomar estos valores de C para el cálculo de C_p.

Una vez obtenidos los mejores valores de N o G y C_p, se pueden usar en la predicción en la forma conocida.

El procedimiento anterior se aplica a acuíferos infinitos. Para acuíferos finitos se usa la misma técnica pero al graficar en el Paso 6), se observará, que cuando el límite del acuífero llega a ser efectivo, C comenzará a disminuir a una rata constante, no importa el valor de N o G asumido. En este caso, el valor de N o G se obtendrí del Paso 6), analizando las diferentes curvas y seleccionando la de menor variación de C con tiempo. Además, para la predicción es necesario obtener una ecuación de C con tiempo. En vista de lo anterior, el método es más recomendado, cuando se trate de acuíferos infinitos. Tiene la ventaja de ser un método sencillo y puede trabajarse fácil - mente con calculadora de escritorio.

Eficiencia de Desplazamiento.-

Los métodos de análisis de la historia del yacimiento discu

tidos en las secciones anteriores, son métodos relativamente simplificados, pues no toman en consideración la reducción (disminución) de la zona de petróleo, debido a la intrusión (invasión) de agua y a la expansión de la capa de gas, en caso de que éste exista. Un análisis más completo debe considerar estos factores.

Eficiencia de desplazamiento es una medida de la cantidad de petróleo que el agua de intrusión desplaza de la zona de petróleo y en caso de existir capa de gas inicial y cuyo comportamiento sea de expansión, es una medida de la cantidad de petróleo desplazado al expandirse tal capa de gas dentro de la zona de petróleo. Taels eficiencias se definen,

1) Eficiencias de desplazamiento en la zona de intrusión de agua,

$$ED_{ig} = \frac{\text{Intrusión neta de agua}}{\begin{bmatrix}\text{Volumen de petróleo de la zona de petróleo} \\ \text{invadida por agua}\end{bmatrix}} \qquad (170)$$

2) Eficiencia de desplazamiento en la zona de expansión de la capa de gas,

$$ED_{ig} = \frac{\text{Expansión total de la capa de gas}}{\begin{bmatrix}\text{Volumen de petróleo de la zona de petróleo} \\ \text{invadida por gas}\end{bmatrix}} \qquad (171)$$

La intrusión neta de agua es simplemente la intrusión total menos el agua producida, $(W_e - W_p)$. El término W_e debe determinarse con tiempo según se ha discutido y W_p es dato de producción. La expansión total de la capa de gas está dada por $(GB_{gi} - G_{pc})B_g - G$, o sea que debe conocerse el gas originalmente en la capa de gas y el gas producido G_{pc}, de esta capa. Ambos términos asumen que el petróleo que queda en

las zonas invadidas no sufren cambios (merma), ni ocurre liberación de gas de tal petróleo. Si esto último ocurre, tal gas liberado debe aumentarse a la intrusión neta o a la expansión de la capa de gas, y los términos anteriores habría que modificarlos, dividdiéndolos por el factor $[1 - S_{or}(R_{si}-R_s)\ B_g/B_o(1-S_{or})]$, donde S_{or} es la saturación residual de petróleo en tales zonas de intrusión o expansión. Además se considera que todo el petróleo ha quedado atrapado en estas zonas a la presión inicial, de lo contrario es necesario modificar el valor de R_{si}.

Los volúmenes de petróleo de las zonas de petróleo invadidas por agua y gas, pueden a menudo obtenerse del comportamiento del campo, si se logra conocer el volumen del yacimiento invadido por agua o gas de la capa de gas. Conociendo la saturación inicial de petróleo, se determina el volumen de petróleo en tales zonas.

Los volumenes de yacimiento (formación productora) invadidos por agua o gas, pueden determinarse por el movimiento de los contactos agua-petróleo y gas-petróleo. La posiciones de estos contactos pueden estimarse de pozos o por registros. Si los contactos no se mueven uniformente, el volumen invadido debe determinarse en cada pozo y luego por mapas isopacos, determinar los volumenes invadidos. Las eficiencias de desplazamiento de la historia, pueden usarse para predicciones, siempre y cuando las condiciones futuras de operación permanezcan relativamente iguales.

Si las eficiencias del comportamiento no pueden determinarse del comportamiento del campo, existen otras técnicas que pueden usarse, entre las cuales la más común es la de Welge[44]. El método de análisis y predicción de Woody y Moscrip[45] también incluye el cálculo de eficiencias de desplazamiento.

Welge[44,46] basa su método en las ecuaciones de desplazamiento de Buckley y Leverett[47], para lo cual,entre otras cosas, se requiere conocer las curvas de permeabilidad relativa. La ecuación de flujo fraccional, para una fase desplazante d y petróleo, despreciando el término de capilaridad, puede escribirse,

$$f_d = \frac{1}{1 + \frac{k_o \mu_d}{k_d \mu_o}} \left[1 - \frac{(0,488)(10^{-3})\ A\ k\ k_{ro} \Delta\rho\ \text{sen}\alpha}{\mu_o\ q_t} \right] \qquad (172)$$

donde d se refiere a la fase desplazante que puede ser agua o gas. El término $\Delta\rho$ es la diferencia en densidades: para petróleo y agua, $\Delta\rho = (\rho_w - \rho_o)$ y para petróleo y gas, $\Delta\rho = (\rho_o - \rho_g)$. La Fig.59 presenta una curva típica de f_d como función de S_d (S_w o S_g) y la curva de distribución de saturación correspondiente. El valor de S_{di} corresponde en el caso de intrusión de agua, a la saturación de agua existente en la zona de petróleo antes de comenzar la intrusión y en el caso de expansión de la capa de gas, a la saturación de gas existente en la zona de petróleo antes de comenzar la expansión. Este valor es generalmente cero o muy cerca de cero y en tal caso la curva de flujo fraccional parte de cero. La tangente a la curva de f_g, a partir de S_{di}, determina la saturación S_{dx} en el frente de intrusión (invasión) o expansión y la saturación promedia en dichas zonas, S_{dp}, tal como indica la Fig.59. De estos datos, puede determinarse la eficiencia de desplazamiento. Además se determina el valor de saturación máxima de la fase desplazante, S_{dmax}, y por consiguiente la saturación irreducible de petróleo, S_{or}.

El término que incluye $\Delta\rho$, denominado término de gravedad, muestra otros factores, además de la razón de permeabilidades relati-

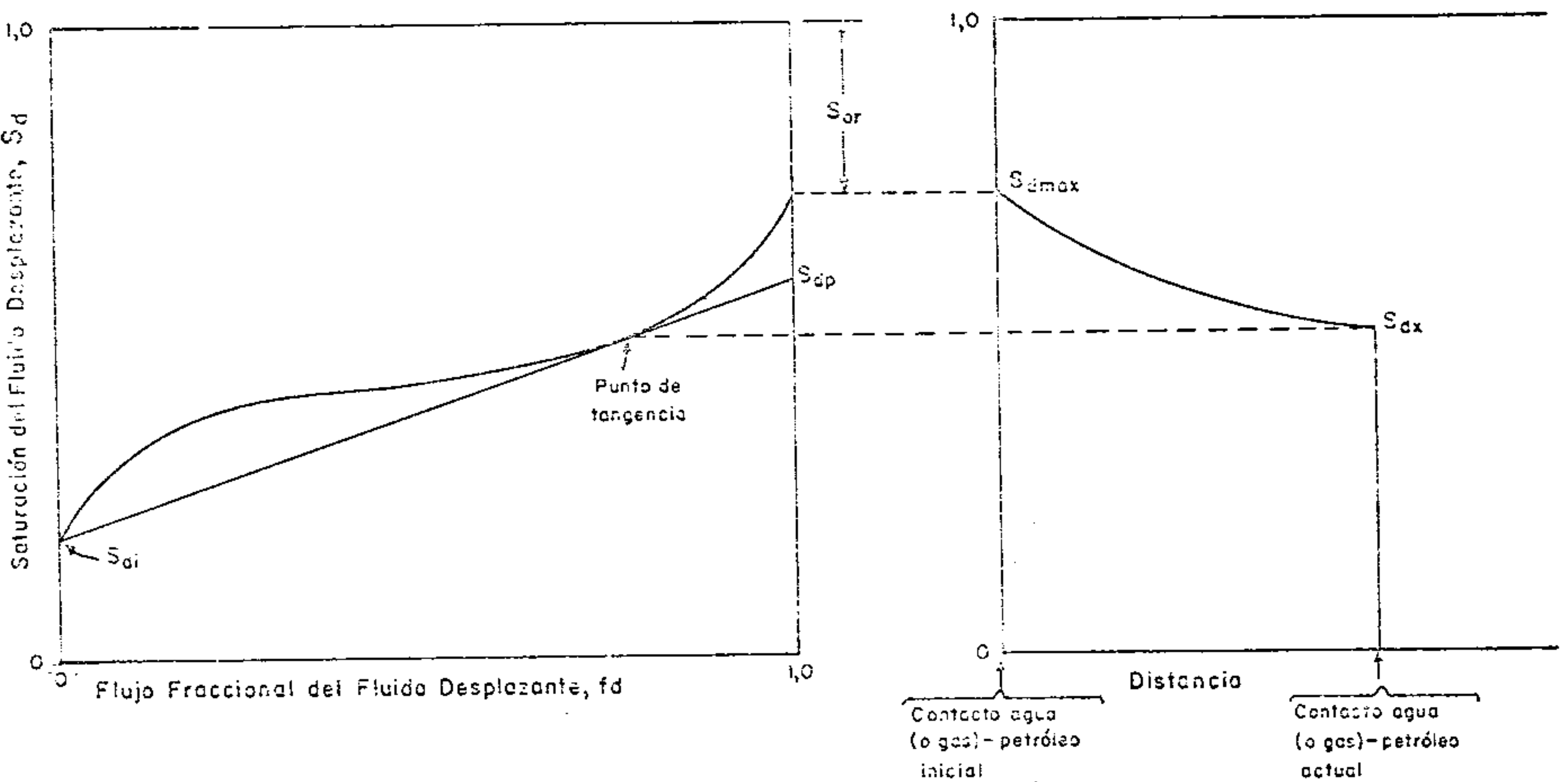


Fig. 59.– Curvas típicas de flujo fracional y distribución de saturación para determinar eficiencias de desplazamiento por el método de Welgs.

vas, k_o/k_d y de la razón de viscosidades, μ_d/μ_o, que influyen en la curva de f_d contra S_d y por consiguiente en la eficiencia de desplazamiento. Tales factores son: A, k, μ_o, $\Delta\rho$, α y q_t. Cada uno de estos factores, puede, teóricamente, estudiarse por separado y verse como influyen en la eficiencia de desplazamiento. Por ejemplo, un aumento en la rata de producción, aumentará las fracciones de flujo de agua o gas para una saturación dada. Esto, por supuesto, disminuye la eficiencia de desplazmiento.

Sin embargo, ya se discutió respecto a los facores que deben tenerse en cuenta en la rata de producción para una recuperación máxima. Entre otros, la permeabilidad de la formación, k, y la viscosidad del petróleo, son factores muy influyentes.

Woody y Mosscrip[45], combinan las ecuaciones de balance de materiales, de intrusión de agua y de desplazamiento (Buckley y Leverett) y las resuelven simultáneamente. El petróleo originalmente en el yacimiento lo consideran conocido. Determinan a diferentes tiempos de la historia del yacimiento, la constante de intrusión de agua y las posiciones de los contactos agua-petróleo y gas-petróleo, lo mismo que las distribuciones de saturación en las zonas de intrusión y expansión. Con estos datos, obtienen las eficiencias de desplazamiento a estos mismos tiempos. Además el método permite estudiar la variación de la rata de producción con el fin de determinar la rata de producción para máxima eficiencia. Los cálculos son bastante laboriosos e incluyen un proceso de ensayo y error (tanteo), por tanto, deben efecutarse a través de una computadora.

El método de Woody y Moscrip también puede usarse para predecir el yacimiento. En este sentido, los cálculo exigen conocer la pre-

sión y la rata de producción para cada período futuro en se desee la predicción. Esto introduce en el método una serie de cálculos de ensayo y error: se asume la presión y la rata de producción,se hacen los calculos y se compara con los valores estimados. Si los dos no verifican satisfactoriamente, deben revisarse los estimados y repetir los cálculos hasta obtener una solución satisfactoria. Así se continua para cada tiempo futuro.

Rachford y otros[48], presentan un método numérico que permite también calcular el movimiento de los contactos agua-petróleo y gas-petróleo con tiempo a partir de la historia de presión y producción. El método también permite predecir, asumiendo valores de las razones gas-petróleo y agua-petróleo.

PREDICCION DEL COMPORTAMIENTO DE YACIMIENTOS CON EMPUJE HIDRAULICO.

El término, predicción de yacimientos con empuje hidráulico puede tener varios significados de lo que se desee predecir: presión, rata de intrusión, intrusión total. etc. Por tanto, es más correcto, en forma similar al caso de yacimientos con empuje por gas en solución, hablar de predicción del comportamiento de yacimientos con empuje hidráulico, lo que combina predicción de presión,intrusión de agua,razón gas-petróleo y agua-petróleo, etc.

El método y la exactitud de una predicción del comportamiento de un yacimiento con empuje hidráulico, depende del método con que se haya analizado la historia del yacimiento y de las suposiciones hechas para la predicción. Por ejemplo, las mismas ecuaciones que Woody y Moscrip usan para el análisis de la historia, se usan para la predicción tal como se mencionó anteriormente.

En esta sección se presenta un método de predicción del comportamiento de yacimientos con empuje hidráulico, en base a que la intrusión de agua, puede expresarse por una de las fórmulas vistas anteriormente. Este método de predicción es un método de iteración (repetición de calculos) o ensayo y error (tanteo) y en este sentido se asemeja a algunos de los métodos de predicción de yacimientos de empuje por gas en solución. Además, en un empuje hidráulico, el tiempo es un factor en cada punto de la predición. El método asume conocida la rata de producción de petróleo o permite determinarse de la historia del yacimiento. Igualmente, asume conocida la producción de agua, expredada generalmente por la razón agua-petróleo, RAP.

La rata de producción de petróleo puede estimarse a partir del índice de productivifad, j,

$$Q_o = J(p_e - p_{wf}) \qquad (173)$$

donde J puede ser el índice de productividad para cada pozo o del campo en general. En este último caso, Q_o será la rata de producción total del campo y **en el** primer caso, la rata total de producción, será la suma de las ratas de produción individuales de los pozos. Además en este caso, el valor de p_e es aproximadamente igual a la presión del yacimiento, valor asumido en la predicción. El valor de p_{wf} es la presión fluyente de cada pozo. El valor de J puede expresarse por,

$$J = \frac{0,00708\ k\ k_{ro}\ h}{\mu o\ Bo\ \ln(r_e/r_w)} \qquad (174)$$

El grupo de términos $kh/\ln(r_e/r_w)$ puede evaluarse de la prueba inicial de productividad del pozo. En ese momento k_{ro} es muy cercano a la uni

dad y μ_o y B_o se evaluan a la presión inicial. En esta forma podría obtenerse en índice de produtividad inicial, J_i. El índice de productividad permanece práticamente constante para presiones de producción por encima del punto de burbujeo. A medida que la presión disminuye se forma saturación de gas en la zona de petróleo, k_{ro} y B_o disminuyen y μ_o aumenta. Muchas veces, el cambio principal en el J puede ocurrir debido a la reducción de h a medida que el agua, gas, o ambos invaden el intervalo productor.

La predicción de ratas de producción de pozos parcialmente invadidos por agua es difícil, ya que k_{ro} no se conoce. En la práctica, se produce muy poco petróleo una vez que ocurra la ruptura. Además es recomendado reparar los pozos para prevenier producción excesiva de agua. A veces para predecir las ratas de producción de petróleo en pozos de alta producción de agua, se hace uso de las curvas de declinación.

Los siguientes pasos resumen el procedimientos de predicción para el caso de un empuje hidrñalico donde no existe capa de gas inicial. En caso que exista, bastará modificar las ecuaciones correspondientes, por el facotr m. Además, tampoco existe ningún tipo de inyección:

(1) - Se selecciona un incremento (intervalo) de tiempo Δt, generalmente un mes, un trimestre, un semestre o un año. En esta forma se determina el tiempo a la que se van a efectuar los calculos,

$$t_j = t_{j-1} + \Delta t \qquad (175)$$

donde j es el número de la etapa.

(2) - Se fija una rata de producción promedia del yacimiento,

Q_o, para el período considerado, de donde puede escribirse,

$$\Delta N_p = Q_o \Delta t \tag{176}$$

$$N_{pj} = N_{pj-1} + \Delta N_p \tag{177}$$

(3) - Se asume una presión P_j. Esta será la variable de ensayo y error (tanteo) en los cálculos para la predicción.

(4) - Usando el tiempo t_j y la presión asumida p_j, se determina la intrusión de agua de acuerdo al tipo de intrusión considerado, Ecs.(105), (112) o (122),

$$W_{ej} = C\left[f(p,t)\right]_j \tag{178}$$

(5) Se calcula la saturación de petróleo en la zona de petróleo por la fórmula[1],

$$S_{oj} = \frac{\left[N - N_{pj} - \dfrac{(W_{ej} - W_{pj})(1 - \overline{S}_{wf} - \overline{S}_{gf})}{(\overline{S}_{wf} - S_{wi})B_{oj}}\right]B_{oj}}{\dfrac{NB_{oi}}{(1 - S_{wi})} - \dfrac{(W_{ej} - W_{pj})}{(\overline{S}_{wf} - S_{wi})}} \tag{179}$$

Esta ecuación es la número (93) de la referencia 1. Asume que no existe capa de gas inicial, o si existe, ocurre difusión del gas en el petróleo y el contacto agua-petróleo no se mueve. En caso de existir capa de gas y segregación de la misma, se usa la Ec.(101) de la Referencia 1. En la ecuación anterior, $\overline{S}_{wf}$ y $\overline{S}_{gf}$ son las saturaciones de agua (incluye S_{wi}) y saturación de gas en la zona invadida por el agua. Además, $(1 - \overline{S}_{wf} - \overline{S}_{gf}) = \overline{S}_{of}$, o sea saturación irreducible de petróleo en la zona invadida por agua. Estos valores de saturación deben

conocerce, bien sea de pruebas de laboratorio, de campo, método Welge, etc.

El valor de W_{pj} debe determinarse del comportamiento pasado (historia) y generalmente se expresa como la razón agua-petróleo, RAP, o sea una fracción de ΔN_p. El valor de W_{ej} es el calculado en el Paso (4). Los demás datos son función de presión (B_{oi}, B_{oj}) o constantes (S_{wi},N).

(6) - Con el valor de S_{oj} y las curvas de permeabilidad relativa en la zona de petróleo se determina la razón de permeabilidades relativas, $(k_g/k_o)j$, de donde se determina la razón gas-petróleo instantanea a la presión pj,

$$R_j = \left[\frac{k_g}{k_o}\right]_j \left[\frac{\mu_o}{\mu_g} \; \frac{B_o}{B_g}\right]_j + R_{sj} \tag{180}$$

(7) - Se calcula el valor de la razón gas-petróleo acumulada, R_p, a la presión pj,

$$R_{pj} = \frac{(R_{pj-1})(N_{pj-1}) + \left[\frac{R_{pj-1} + R_{pj}}{2}\right]\Delta N_{pj}}{N_{pj}} \tag{181}$$

donde, $\Delta N_{pj} = N_{pj} - N_{pj-1}$

(8) - Se calcula la intrusión de agua, W_{ej}, usando la ecuación de balance de materiales,

$$W_{ej} = N_{pj}\left[B_{tj}+(R_p-R_{si})B_g\right] - (B_{tj}-B_{ti}) + W_{pj} \tag{182}$$

(9) - Se compara el valor de W_e del Paso (8) con el valor de

W_e del Paso (4). Si coinciden dentro de una aproximación normal, la presión asumida p_j es la correcta y se continua la predicción para el tiempo j+1. Si son muy diferentes es necesario asumir una nueva presión y repetir los cálculos hasta obtener valores satisfactorios. Obsérvese que N_{pj} y t_j permanecen constantes y solamente varía la presión. Un aumento en presión, aumenta la intrusión total de agua por la fórmula, W_e=Cf(p,t) y la disminuye al calcularse por la ecuación de balance de materiales. Por tanto:

a) Si W_e (Paso 8) > W_e (Paso 4), se disminuye la presión

b) Si W_e (Paso 8) < W_e (paso 4), se aumenta la presión

La predicción hasta este paso, permitiría obtener p, W_e, N_p, como función de tiempo. La predicción puede hacerse más completa, si en el análisis de la historia se ha determinado el avance de agua-petróleo dentro de la zona de petróleo y la eficiencia de desplazamiento. Además, también puede verificarse si la rata de producción usada en cada intervalo es la correcta, siempre y cuando de la historia se haya determinado una relación entre producción y volumen de la zona de petróleo invadido. En está forma puede agregarse los siguientes pasos en la predicción:

(10) - Se determina el volumen de petróleo de la zona de petróleo invadido por agua o gas, conociendo la eficiencia de desplazamiento en estas zonas y la intrusión neta de agua y expansión total de la capa de gas, Ecs.(170) y (171). De este valor se determinan el volumen poroso invadido y pueden localizarse los contactos agua-petróleo y gas-petróleo.

(11) - Si se ha obtenido una relación entre la producción y el

volumen de la formación invadida se verifica si el volumen invadido calculado en el Paso (10), está dentro de una aproximación normal (± 10 por ciento, puede considerarse satisfactorio). Si ocurre una diferencia muy grande, se toma otra rata de producción y se repiten los cálculos hasta obtener verificación aceptable.

También podría considerarse el caso de un mantenimiento de la presión en un valor p. En este caso, podría estimarse la cantidad de fluído que es necesario inyectar en la siguiente forma:

(1) - Igual al Paso 1) del procedimiento anterior.

(2) - Igual al Paso 2) del procedimiento anterior.

(3) - Se calcula $W_e = C\ f(p,t)$ y luego el incremento en intrusión $\Delta W_e = (W_{ej} - W_{ej-1})$.

(4) - Se calcula W_e por balance de materiales y el incremento de intrusión $\Delta W_e = (W_{ej} - W_{ej-1})_{BM}$.

(5) - Se calcula la inyección neta al yacimiento durante el intervalo considerado,

$$\text{Inyección neta} = \Delta W_e \text{ (Paso 4)} - \Delta W_e \text{ (Paso 3)}$$

En esta forma se repiten los cálculos hasta el tiempo deseado, de acuerdo al agotamiento, invasión, etc. Debe tenerse en cuenta que si la intrusión sigue flujo no-continuo y el acuífero es limitado, el valor de ΔW_e del Paso 3) llega un momento en que es cero, de acuerdo al valor de t_D.

PREDICCION EN BASE A LA SOLUCION DEL CASO DE RATA TERMINAL CONSTANTE.

Las soluciones de la ecuación de difusividad para el caso de rata terminal constante fueron dadas anteriormente. El teorema de su

perposición permite usar tales soluciones cuando la rata de intrusión cambia con tiempo en la forma indicada en la Fig.54. En forma general puede escribirse, Ecs.(79) y (84),

$$\Delta p = p_i - p_n = A \sum_{j=1}^{n} (e_j - e_{j-1}) \Delta p\left[(t_n - t_{j-1})_D\right] \qquad (183)$$

donde A es una constante que depende del tipo de acuífero:

Acuíferos Lineales,

$$A = \frac{887,58 \mu L}{kbh} \qquad (184)$$

Acuíferos Radiales,

$$A = \frac{141,2\ \mu}{kh} \qquad (185)$$

Además, $e_o = 0$ y $t_o = 0$. Para acuíferos lineales, $\Delta p = F_k$. Esta solución puede emplearse en dos formas para la predicción:

1.- Predicción de presiones en el contacto agua-petróleo, para una rata de intrusión dada.

2.- Cálculo de ratas de intrusión, para una presión dada en el contacto agua-petróleo.

En cada uno de estos casos, de la historia (o predicción anterior) se conoce la presión como función de rata de intrusión, hasta el tiempo t_n, Ec.(183). Esta ecuación, para un tiempo n+1, se escribe,

$$p_i - p_{n+1} = A \sum_{j=1}^{n} (e_j - e_{j-1}) \Delta p\left[(t_{n+1} - t_{j-1})_D\right] + A(e_{n+1} - e_n) \Delta p\left[(t_{n+1} - t_n)_D\right] \quad (1$$

Esta ecuación puede usarse para predecir los dos casos mecionados. Si se conoce e_{n+1} al tiempo t_{n+1}, se despeja p_{n+1} y si se conoce este valor se despeja e_{n+1}. En el siguiente paso, p_{n+1} y e_{n+1} serán conocidos, y pasan a ser p_n y e_n. Se hace de nuevo la predicción para el t_{n+1}, que en realidad será t_{n+2}. Se procede así sucesivamente. Los demás términos de la ecuación son conocidos. Ambos casos suponen conocida la constante A.

Si se conoce el valor del petróleo o gas orginalmente en el yacimiento, de la ecuación de balance de materiales puede calcularse W_e a diferentes tiempos y de aquí cálcular los valores de e. Luego, aplicando la ecuación anterior se calculan los valores de p y se comparan con los de la historia. Puede determinarse un valor de A que permite un chequeo aproximado de presiones. De la variación de e con tiempo, puede extrapolarse e y predecir p de la ecuación anterior. A veces, y particularmente en yacimientos que producen por encima del punto de burbujeo, la rata de producción de petróleo puede considerarse igual a la rata de intrusión. En este caso aún es más fácil hacer la predición.

El mejor valor de A puede obtenerse fácilmente de la historia del yacimiento en la siguiente forma:

1.- De la historia del yacimiento se calcula $\Delta p_j = (p_i - p_j)$, denominados Δp_j observados, $(\Delta p_j)_{obs}$.

2.- Conociendo las ratas de intrusión, se calcula la sumatoria de la Ec.(183), una sumatoria para cada tiempo.

3.- Se calcula un primer valor de A, dividiendo la suma de todos los Δp observados por la sumatoria de todos los términos (sumatorias) calculados en el Paso 2).

4.- Se calculan valores Δp_j denominados Δp_j calculados, $(\Delta p_j)_{cal}$ multipicando el valor de A obtenido en el Paso 3) por cada una de las sumatorias del Paso 2)

5. - Se obtiene la desviación normal correspindiente,

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left[(\Delta p_j)_{cal} - (\Delta p_j)_{obs}\right]^2} \qquad (187)$$

6.- Se asumen otros valores de A y se repiten los Pasos 4) y 5). Finalmente, se gráfica σ contra A y donde ocurre el mínimo valor de σ alli se toma el mejor valor de A.

OTROS METODOS DE ANALISIS Y PREDICCION.

Además de los métodos estudiados anteriormente para el análisis y predicción de yacimientos con empuje hidraûlico, otras técnicas han sido usadas para hacer este tipo de estudios. Se discutirá en esta sección los métodos de Hutchinson y Sikora[49] y de Funciones de Influencia[33,34] y brevemente las técnicas de Modelos Analógicos[50 a 53] (analizadores o computadores analógicos eléctricos) y Matemáticos. En particular, está última técnica está desplazando casi totalemente el estudio en modelos analógicos, debido al desarrollo de computadores de mayor capacidad.

Método de Hutchinson y Sikora.

Este método permite analizar y predecir la historia de un yacimiento con empuje hidráulico de un modo general, sin necesidad de conocer la geometría y tamaño del acuífero. Es un método sencillo de análisis y permite hacer los cálculos manualmente por medio de una calculadora de escritorio.

El método exige el conocimiento del petróleo originalmente en el yacimiento y la historia normal del mismo: presión, datos de producción, PVT, etc. De la ecuación de balance de materiales, se calcula la intrusión de agua y luego la rata de intrusión. Con datos de presión y rata de intrusión se desarrolla una ecuación que relaciona estos términos a través del factor, denominado Función o Factor de Resistencia Z, el que incluye la geometría del acuífero, forma y distribución de flujo. La variación de este factor puede extrapolarse para predecir el yacimiento.

Las Ecs.(26a), (28a) y (29a) expresan la caída total de presión en el contacto agua-petróleo para una rata constante de intrusión en acuíferos lineales y las Ecs.(57) y (63) expresan igual cosa para acuíferos radiales. En general, tales ecuaciones pueden escribirse,

$$\Delta p = (p_i - p) = A\ e\ Z(t_D) \tag{188}$$

donde A es una constante que depende de la geometría del acuífero, e, es la rata de intrusión y $Z(t_D)$ es una caída de presión adimensional, que puede hallarse en tablas en función de t_D, según se discutió anteriormente. Si se gráficara Δp como función de t, para una rata de intrusión constante, e, se obtendrían las formas de las curvas 1 y 2 de la Fig.60, para acuíferos infinitos y finitos respectivamente. Al comienzo, la presión caerá rápidamente a medida que el agua comienza a moverse en la región próxima al contacto agua-petróleo. A medida, que mayores volumens de agua entran en movimiento, la caída total de presión con tiempo disminuye. Si el acuífero es uniforme en propiedades e infinito, Curva 1, la caída total de presión siempre aumneta con tiempo pero cada vez a una rata menor a medida que el tiempo avanza. Un

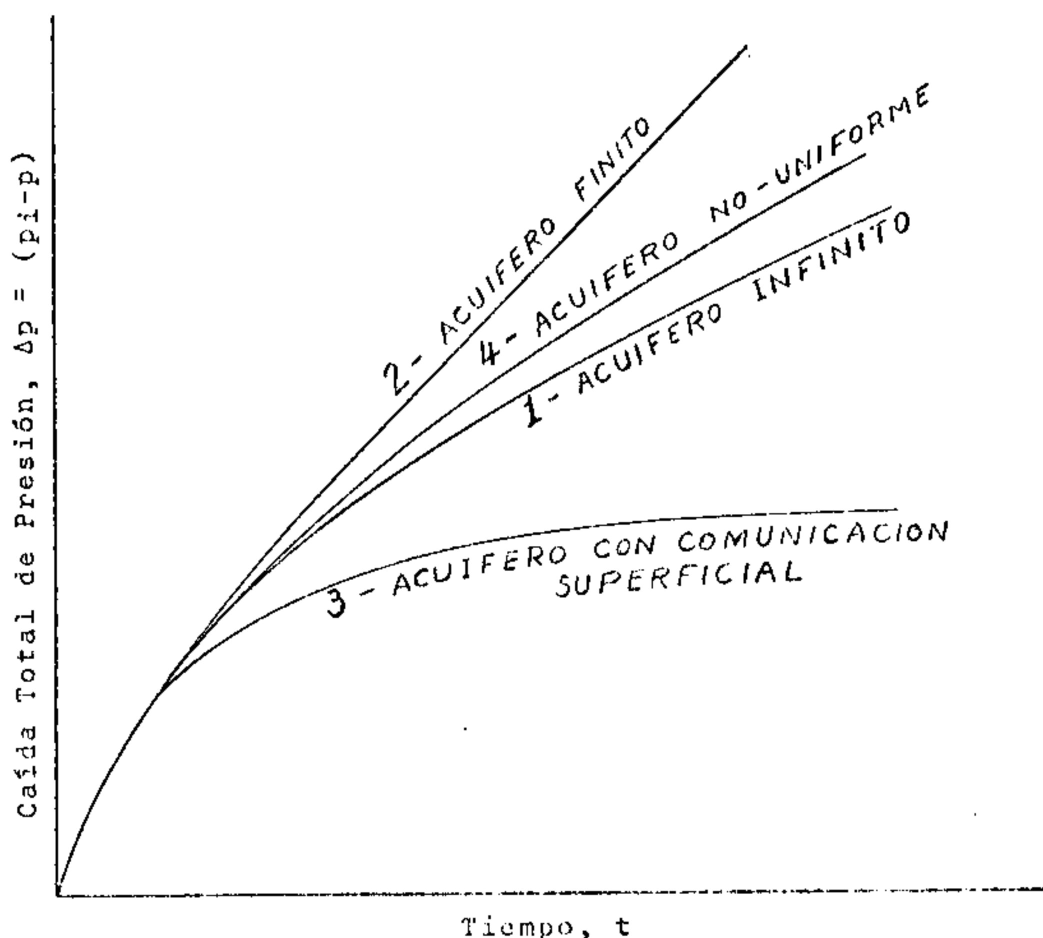


Fig.60 - Caída total de presión en el contacto agua-petróleo como función de tiempo para una rata de intrusión, e, constante y de acuerdo al tipo de acuífero

gráfico de Δp contra log(t) para este tipo de acuífero presenta una pendiente que disminuye constantemente con tiempo hasta que se hace constante. Fig.19. Esta propiedad es básica para la predicción, como se verá más adelante.

Si el acuífero es limitado (finito) y cerrado, el área de disturbio alcanzará el límite exterior y de allí en adelante la rata a la cual la presión disminuye es constante, Curva 2, ya que la caída de presión en el acuífero, se debe al agotamiento del volumen limita

do de fluído del acuífero. En este caso puede escribirse,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{e}{cVp} \qquad (189)$$

donde c es la compresibilidad del agua y Vp es el volumen poroso del acuífero.

En la Fig.60 también se indican otras curvas: Curva 3, caso de un acuífero que comunica a la superficie y por consiguiente después de determinado tiempo, la caída de presión con tiempo es cero. Finalmente, la Curva 4, donde ocurre inhomogeneidades en el acuífero.

Las curvas de esta figura presentan una característica importante: la pendiente siempre disminuye con tiempo o se hace constante pero nunca aumenta. Esta propiedad se expresa diciendo que la pendiente disminuye monotónicamente . Este principio y la forma de las curvas es la base del método de Huchinson y Sikora.

En la discusión correspondiente el principio de superposición, se dedujeron ecuaciones para calcular la caída total de presión en el contacto agua-petróleo, cuando la rata de intrusión varía con tiempo en la forma indicada en la Fig.54. Tales ecuaciones (Ecs.(81) y (86)), pueden escribirse en forma general,

$$\Delta p = A \sum_{j=1}^{n} e_{n+1-j} \left[F\left[(t_n - t_{n-j})_D\right] - F\left[(t_n - t_{n+1-j})_D\right] \right] \qquad (190)$$

donde A es una constante que depende del tipo de acuífero y $F(t_D)$ es una presión adimensional que puede ser $F_k(t_D)$ o $\Delta p(t_D)$ de acuerdo al acuífero, según indican las Ecs.(81) y (86).

La presión adimensional $F(t_D)$ depende del tiempo adimensional t_D y éste depende del tiempo dimensional, t, a través de la constante Δt_D. Por tanto $F(t_D)$ depende de t y puede escribirse F(t). Multiplicando éste valor por A y definiendo el producto como una nueva función de resistencia, Z(t), o simplemente función Z, la ecuación anterior puede escribirse,

$$\Delta p = \sum_{j=1}^{n} e_{n+1-j}\left[Z(t_n-t_{n-j})-Z(t_n-t_{n+1-j})\right] \qquad (191)$$

En esta ecuación, la función Z se obtiene a los tiempos dimensionales (t_n-t_{n-j}) y (t_n-t_{n+j-1})

Si los intervalos de tiempo, $(t_{j+1}-t_j) = \Delta t$, son iguales, luego, $t_n = n\Delta t$ y $t_j = j\Delta t$ y la ecuación anterior puede escribirse,

$$\Delta p = \sum_{j=1}^{n} e_{n+1-j}\left[Z(j\Delta t) - Z\left[(j-1)\Delta t\right]\right] \qquad (192)$$

$$\Delta p = \sum_{j=1}^{n} e_{n+1-j}\ \Delta Z_j \qquad (193)$$

donde,

$$\Delta Z_j = Z(j\Delta t) - Z(j-1)\Delta t \qquad (194$$

Si se conoce una curva de Z como función de tiempo, puede calcularse la caída total de presión en el contacto agua-petróleo por medio de la Ec.(193). De la historia del yacimiento puede obtenerse tal curva de Z como función de tiempo y su extrapolación, de acuerdo a la forma, puede usarse para la predicción, usando también la Ec.(193).

Los siguientes pasos, resumen la obtención de la mejor función

Z contra tiempo:

1 - Se divide la historia del yacimiento en iguales intervalos de tiempo, Δt, y usando la ecuación de balance de materiales, se calcula la intrusión total de agua W_e, a cada tiempo de la historia. Por supuesto, esto considera que se conoce el petróleo originalmente en el yacimiento, N

2 - Se calcula la rata promedia de intrusión de agua a cada tiempo, dividiendo por Δt, el promedio de la diferencia entre el W_e al tiempo posterior menos el W_e al tiempo anterior,

$$e_j = \frac{W_{ej+1} - W_{ej-1}}{2\Delta t} \qquad (195)$$

Como antes se mencionó, algunos yacimientos que producen por encima del punto de burbujeo, la rata de producción puede considerarse igual a la rata de intrusión. En este caso, los Pasos 1) y 2) podrían eliminarse.

3 - De la historia del yacimiento, se calcula la caída de presión total, $\Delta p_j = (p_i - p_j)$, denominada caída de presión observada, $(\Delta p_j)_{obs}$

4 - Se asume una primera aproximación de Z como función de tiempo. Si cada período se numera ascendentemente, 1, 2, 3, ... j ... n, donde j, varía de 1 a n; se toma como primera aproximación de Z_j la raíz cuadrada del número del intervalo,

$$Z_j = \sqrt{j} \quad (j = 1, 2, 3, \ldots n) \qquad (196)$$

5 - Se determina ΔZ_j y por medio de la Ec.(193) se calcula una caída de presión total, denominada caída de presión calculada. Debe tenerse cuidado al usar esta ecuación ya que los términos de la su

matoria estan arreglados en orden inverso, es decir, la rata de intrusión para el intervalo n se multiplica por el ΔZ_1 para el intervalo 1; la rata de intrusión para el intervalo (n-1), estará multiplicada por el ΔZ_2 del intervalo 2, etc. Por tanto, es conveniente escribir una columna invirtiendo el orden de la rata de intrusión, y así la multiplicación de esta columna con la columna de los Δt_j dará directamente los Δp calculados, $(\Delta p_j)_{cal}$.

6 - Se divide cada Δp observado (obtenido en el Paso 3) por el correspondiente Δp calculado en el Paso 5). El cuociente se denomina, f_{cj}, factor de correción j.

7 - Se multiplica cada Z_j por el correspondiente factor de corrección, f_{cj}, del paso anterior: Z_j (nuevo) = f_{cj} Z_j (viejo). Se gráfica Z_j como función de j (equivalente Z_j como función de tiempo) y se traza una curva continua a través de los puntos, teniendo en cuenta que la pendiente siempre debe ser positiva y disminuir o permanecer constante con tiempo.

8 - A cada intervalo se lee un nuevo valor de Z_j del gráfico del paso anterior y se repiten los Pasos del 5) al 8) hasta que los valores de Z_j en dos iteraciones sucesivas sean iguales o cambien dentro de una aproximación aceptable. Generalmente es suficiente entre tres y cinco iteraciones. Este paso también puede formularse diciendo que las iteraciones se repetin hasta cuando los factores de correción, f_{cj}, lleguen a ser relativamente constantes e iguales o muy cercanos a la unidad.

9 - Con los últimos valores de Δp calculados y los Δp observados, se calcula un factor de correción promedio, f_{cp}, por la fórmula,

$$f_{cp} = \frac{\sum_{j=1}^{n} (\Delta p_j)_{obs}}{\sum_{j=1}^{n} (\Delta p_j)_{cal}} \qquad (197)$$

10 - Se cálculan los mejores valores de Z_j, multiplicando los últimos valores leidos del gráfico en la última iteración (Paso 7), por el factor de correción promedio, f_{cp}, del paso anterior.

11 - Se determinan los mejores valores de Δp calculados multiplicando los últimos valores de Δp obtenidos, por el factor de corrección promedio, f_{cp}. Estos nuevos valores de Δp calculados deben chequear aproximadamente con los Δp observados.

Este último paso no es absolutamente necesario ya que los mejores valores de Z_j se obtuvieron en el Paso 10), pero sirve como un chequeo más y muchas veces se desea conocer la diferencia exacta en los Δp.

Predicción.- Los mejores valores de Z_j se gráfican como función de j y se traza una curva continua a través de ellos. La predicción depende de la forma en que esta curva se puede extrapolar de acuerdo a lo discutido respecto a la Fig.60. Pueden ocurrir varios casos:

1) - Si la última parte de la curva de Z_j como función de j es una línea recta definida, es lógico considerar un acuífero limitado y la exploración se hará linealmente, es decir ΔZ_j (pendiente) es constante, en papel normal.

2) - Si la curva de Z_j contra j en papel normal no presenta linearidad, puede que la presente al graficarse como función de log(j).

Este caso indica que el acuífero es infinito. Para su extrapolación, se consideran dos casos:

Caso a. Que el acuífero se siga comportando como infinito en el futuro y se extrapolará el Z_j como una linea recta al gráficarse como función de log(j). En este caso la extrapolación de la pendiente puede hacerse usando la ecuación,

$$\Delta Z_{j+1} = \Delta Z_j \frac{\log\left[\frac{j+1}{j}\right]}{\log\left[\frac{j}{j-1}\right]} \qquad (198)$$

donde j es un período cualesquiera en el futuro, $j > n$.

Caso b. Que el acuífero sea finito, pero que se haya comportado como infinito hasta el tiempo n. De aquí en adelante se comporta como finito y se extrapolará Z_j contra j como una linea recta en papel normal, tomando la última pendiente conocida.

3 - Puede ocurrir que tanto Z_j como función de j, o Z_j como función de log(j) no presentan linearidad. En este caso nada puede decirse respecto a que el acuífero sea infinito, y lo más recomendado es usar el promedio de la pendiente para los 3 o 4 últimos intervalos y extrapolar como una linea recta en papel normal, es decir, asumir un acuífero limitado.

4 - Ya que la intrusión de agua por caída de presión unitaria es menor para un acuífero finito que para uno infinito de características iguales, en algunos casos se toma un promedio de los valores de Z, considerando acuíferos infinitos y finitos.

Una vez definida la extrapolación de la curva Función de Resistencia Z, por medio de la Ec.(193) puede predecirse la presión para una rata de intrusión dada, o lo contrario, puede predecirse rata de intrusión para una presión dada. Esto se hace paso por paso para cada intervalo en el futuro. Por ejemplo, la Ec.(193) escrita para el intervalo n+1, a la que se conoce Z_{n+1}, será,

$$(pi - p_{n+1}) = e_{n+1} \Delta Z_1 + \sum_{j=2}^{n+1} e_{n+2-j} \Delta Z_j \qquad (199)$$

De esta ecuación, puede calcularse p_{n+1}, si se conoce e_{n+1}, o lo contrario, puede calcularse e_{n+1} si se conoce p_{n+1}.

Funciones de Influencia.

El método de Hutchinson y Sikora discutido en la sección anterior es un caso particular de Funciones de Influencia, sólo que tal caso, se denominó Función de Resistencia Z(t). En la presente discusión se denomina F(t) con el fin de usar la misma nomenclatura empleada en la literatura.

En valor de presión adimensional $\Delta p(t_D)$ de la Ec.(83) depende de t_D y éste de t, por tanto puede escribirse como un valor $\Delta p(t)$. Este valor multiplicado por A se define como Función de Influencia F(t) o simplemente F y puede escribirse,

$$\Delta p = (pi-p_n) = \sum_{j=1}^{n} (e_{n+1-j} - e_{n-j})F_j \qquad (200)$$

Nótese que en esta ecuación se ha invertido la sumatoria comenzando por el último cambio en la rata de intrusión que actúa por el tiempo menor, luego el penúltimo cambio en la rata de intrusión que actúa

por un tiempo un poco mayor y asi sucesivamente. En esta forma las funciones de influencia aparecen en la sumatoria en orden ascendente.

La ecuación anterior también puede expresarse en la forma de la Ec.(193),

$$\Delta p = (pi-p_n) = \sum_{j=1}^{n} e_{n+1-j} \Delta F_j \qquad (201)$$

donde $\Delta F_j = F_j - F_{j-1}$

La forma de las curvas de F(t) contra tiempo es del tipo de las curvas de la Fig.60. Además, F(t) en unidades prácticas, generalmente se expresa en lpc/bls/día, tal como puede verse de las Ecs.(200) y (201). También de estas ecuaciones puede verse que la presión y rata de intrusión están relacionadas a través de la función de influencia, la que puede definirse como la respuesta en presión en el contacto agua-petróleo a una rata de intrusión unitaria causada por una caída de presión unitaria en el mismo contacto agua-petróleo. La función de influencia refleja la heterogeneidad y geometría del acuífero. Por tanto, existe una función particular para cada sistema yacimiento-acuífero.

Si se conoce la F(t) contra tiempo, puede predecirse la presión a partir de un programa de rata de intrusión o viceversa, predecir rata de intrusión, si se conoce la presión. En este caso, a través de balance de materiales puede predecirse producción acumulada y rata de producción de petróleo.

Como antes se mencionó, el método de Hutchinson y Sikora es un caso particular de obtención de la función de influencia a partir de la historia del yacimiento. Las soluciones de Nabor[9], van Everdingen

y Hurst[7] y Mueller[21] para los sistemas lineal y radial ideales vistos anteriormente, permite obtener fácilmente las funciones de influencia para cada caso particular, conociendo las constantes A y Δt_D, en la forma indicada al discutir la Ec.(200).

Hicks y otros[33], discuten el uso de analizadores eléctricos para determinar la función de influencia que describe la historia de un yacimiento y permite efectuar la predicción del mismo. Coats y otros[34] desarrollan un método para obtener la función de influencia por programación lineal a través de computadores y a partir de la historia de presión y rata de intrusión. El programa, además de utilizar la Ec.(200), debe cumplir otras condiciones, ya que la sola programación de la Ec.(200) presenta variaciones en la pendiente de F_j y tal como se discutió en el método de Hutchinson y Sikora, la pendiente de la curva de F(t) contra t debe disminuir monotónicamente.

Modelos Eléctricos.

Más comunmente se conocen con el nombre de analizadores eléctricos[54] o simplemente mallas RC, donde R significa Resistencia y C significa Condensador. Cada modelo se compone de una red de condensadores y resistencias en base a una división del área del yacimiento y del acuífero. Cada una de estas áreas encierra un volumen de formación dado (bloque) y la capacitancia del fluido, definida como el producto del volumen de fluido dentro de los poros y la compresibilidad del fluido, se representan por un condensador. Los valores relativos de la capacidad de los condensadores se fijan por la ecuación,

$$C_E = \frac{M_c a h \phi c}{5,615} \qquad (202)$$

donde, C_E = capacidad eléctrica del condesador, en mircofaradios; M_c = constante del escalamiento entre el fluido y las unidades eléctircas, en microfaradios/bls./lpc; a = área de cada división de la red, en pies cuadrados (ya que el área se divide generalmente en cuadrados, a veces se usa L^2 en lugar de a, donde L es el lado del cuadrado); h = espesor en el área a, en pies; ϕ = porosidad promedia del volumen ah, fracción; c = compresibilidad del fluído en los poros, lpc^{-1}.

La resistencia al flujo entre los centros de los bloques de la red se representa por una resistencia variable, conectada a los condensadores correspondientes. Los valores relativos de las resistencias se representan por la ecuación,

$$R_E = \frac{N_R\ \mu}{0{,}001127\ kh} \tag{203}$$

donde R_E = resistencia eléctrica, em mega-ohmios; N_R = constante de escalamiento del analizador, en mega-ohmios/lpc/bls./dia; k = permeabilidad, en md. ; μ viscosidad del fluido, en cp.; h = espesor promedio del bloque, en pies.

El voltaje en los condensadores representa la presión del yacimiento,

$$\Delta E = P \Delta p \tag{204}$$

donde, ΔE = voltaje a través de los condensadores, en voltios; P = constante de escalamiento, en voltios; Δp = caída de presión entre bloques, en lpc.

Finalmente, el flujo de corriente de cada condensador representa la intrusión de agua o producción de petróleo,

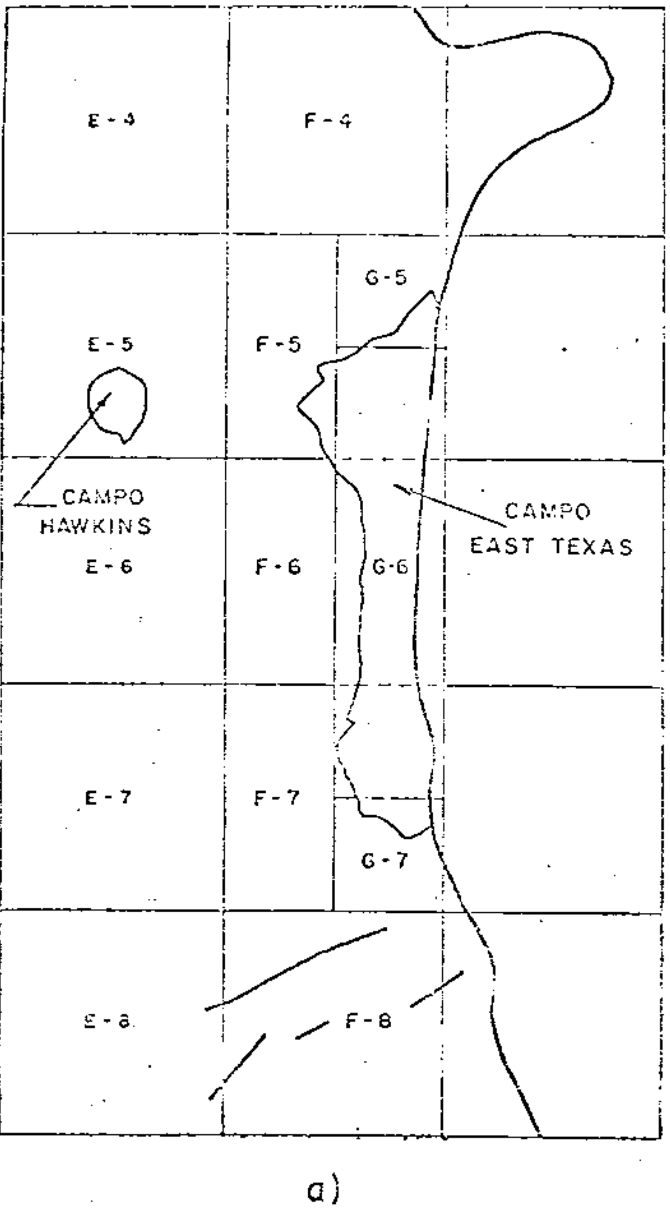
$$I = Q\,e \tag{205}$$

donde, I = flujo de corriente de cada condensador, en micro-amperios; Q = constante de escalamiento, en micro-amperios/bls./día; e = rata de intrusión (o producción) en bls/día.

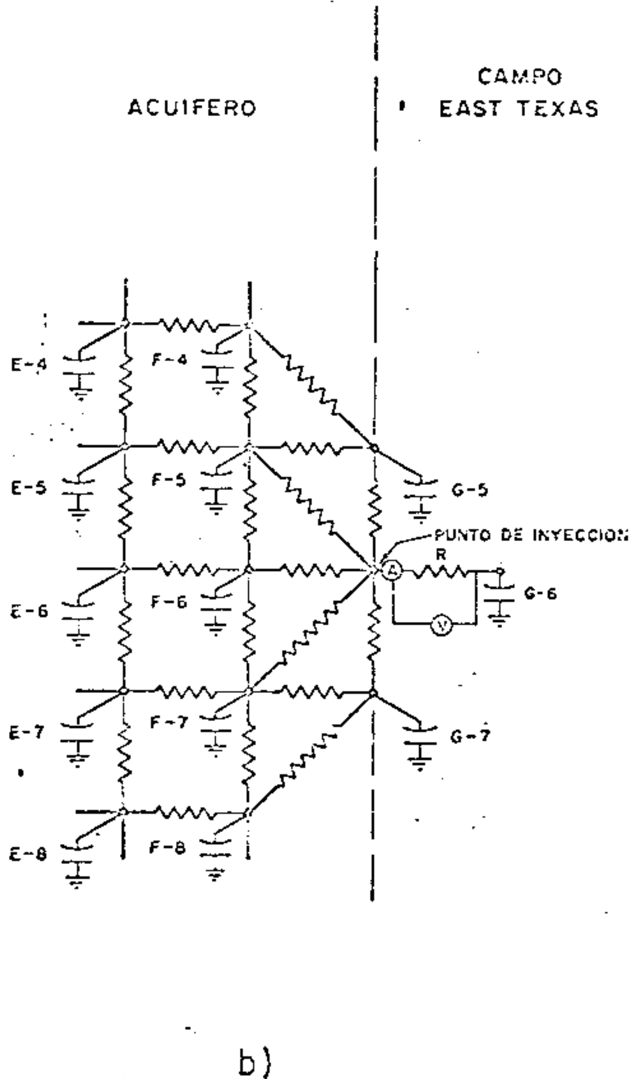
La Fig.61 presenta un ejemplo del Campo East Texas (Estados - Unidos) rodeado por un acuífero, la división en áreas (bloques) y el analizador eléctrico correspondiente, con el que se hizo un estudio del campo y predicción del mismo[51]. Cada punto representa el centro de un bloque donde se asume que ocurra la expansión del fluido. Además, a cada punto va unido un condensador. Los bloques están conectados entre sí por resistencias. El número de bloques depende de la aproximación deseada ya que se supone una presión promedia para cada bloque.

Para similar la producción del campo East Texas, se retira corriente de la malla (analizador) en el punto situado a la derecha, que representa el campo. Por otro lado, para simular inyección de agua a lo largo del extremo (límite) oeste del campo, se introduce correinte proporcional al volumen de agua inyectada en el punto donde se unen las resistencias del acuífero y del campo, tal como indica la Fig.61.

En general, para el estudio del comportamiento de un yacimiento, los condensadores se cargan inicialmente al mismo voltaje, lo que representa igual presión inicial, y sus capacidades son proporcionales al producto del volumen comprimido en cada bloque y a la compresibilidad efectiva. Si el bloque está localizado en un acuífero, el fluído será agua y la compresibilidad es la del agua. Las resistencias representan la resistencia al flujo entre las unidades (áreas en que se ha dividido el sistema). En esta analogía, la caída en voltaje es propor-



a)



b)

Fig. 61.- a) Campo East Texas, Estados Unidos, rodeado de un acuífero y subdividido en areas (bloques);
b) analizador eléctrico para el estudio del campo. (Refererencia 51).

cional a la declinación de presión.

Con el fin de analizar la historia de un yacimiento y predecir su comportamiento, las resistencias y condensadores del acuífero se regulan por ensayo y error (tanteo) hasta que el instrumento reproduzca aproximadamente la historia pasada de presión y producción del yacimiento. Para regular (calibrar) inicialmente el instrumento en forma adecuada, se requiere por lo menos dos o tres años de historia del yacimiento. En la práctica, se escoge una escala adecuada de tiempo, por ejemplo, un minuto = un año y se varía paso a paso la resistencia R, lo que representa el flujo del yacimiento a intervalos exactos. Las corrientes producidas, leídas en el amperímetro A, son proporcionales a las ratas de intrusión de agua durante el intervalo. Estas ratas se calculan por los métodos vistos anteriormente. Cuando la curva entre voltaje y tiempo, generalmente reproducida en un voltímetro con registrador, coincide aproximadamente con la curva tiempo-presión de la historia pasada del yacimiento, se asume que los condensadores y resistencias del instrumento están debidamente regulados para representar el acuífero. Con el instrumento regulado en esta forma, puede simularse el comportamiento del campo cuantas veces se quiera, bajo las ratas de producción e inyección deseadas.

Los analizadores eléctricos más conocidos son el Analizador Carter[50] y el Analizador Sun[53]. Este último realmente es un Computador Analógico, pues además de componerse de una serie de resistencias y condensadores tiene incorporado un sistema que permite resolver automática y simultáneamente la ecuación de balance de materiales y la ecuación de intrusión de agua de flujo no-continuo. En esta forma se elimina la solución por ensayo y error (tanteo) de estas ecuaciones.

Tanto los analizadores eléctricos como los computadores analó gicos tienen ya muy poco a casi ningún uso en la industria petrolera y en su gran mayoría hoy hacen uso de modelos numéricos para la simulación de yacimientos.

Modelos Numéricos de Yacimientos.

El desarrollo de computadores digitales, trajo como consecuen cia la posibilidad de resolución de problemas cada vez más complejos, especialmente en la solución de ecuaciones diferenciales, imposibles de resolver analíticamente (ecuaciones no-lineales). En la industria petrolera se habla comunmente de Modelos Matemáticos o simplemente Modelos Numéricos de Yacimientos[55].

En general, los modelos numéricos de yacimientos consisten en la solución numérica de las ecuaciones fundamentales de flujo[18] para cada una de las fases considerados en el sistema y considerando inyección, producción, intrusión de agua, etc. además de la información misma sobre propiedades de la formación y fluídos del yacimiento. De acuerdo a las ecuaciones fundamentales de flujo usadas, se conocen varios tipos de modelos: (a) de una fase y una, dos o tres direcciones, (b) dos fases y una, dos o tres direcciones y (c) tres fases y una, dos o tres direcciones.

Las ecuacioens fundamentales de flujo se escriben en forma de diferencias finitas, tanto en espacio (direcciones) como en tiempo. Se coloca una malla de diferencias sobre el campo de petróleo o yacimiento como ilustra la Fig.62. A cada punto de la malla (nodo) se le asig na un valor de permeabilidad, espesor, porosidad, contenido de fluídos (saturaciones iniciales), elevación, y presión. A los fluídos (petró-

leo, gas y agua, en caso de un modelo trifásico) se le asignan valores de factores volumétricos, solubilidad y densidad. También debe conocerse la compresibilidad de la formación. Las fuerzas entre roca y fluídos se conocen de las siguientes funciones, dependientes de la saturación: permeabilidad relativa para cada fase, presión capilar entre petróleo y agua, presión capilar entre agua y petróleo. Otra información necesaria proviene de los pozos e incluye: intervalo productor, rata de producción de petróleo, gas y agua como función de tiempo y presión observada como función de tiempo.

En un proceso de simulación se asignan ratas de producción por pozo para cada una de las fases. Luego se considera una diferencia fi

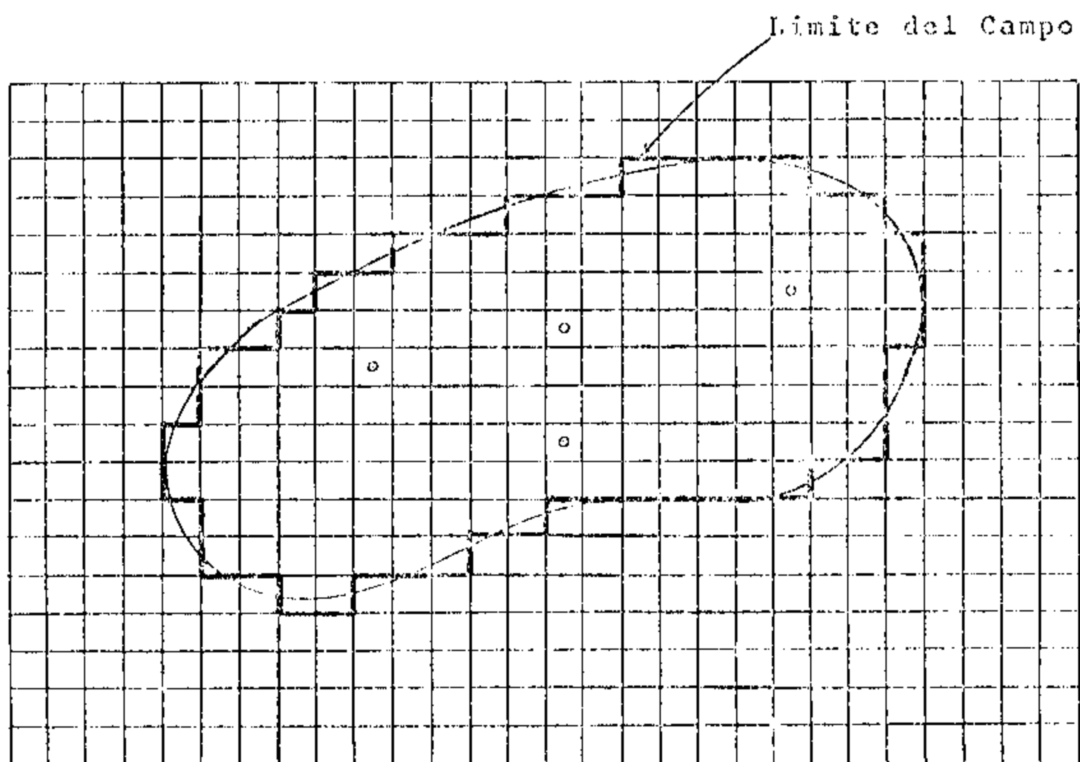


Fig.62 - Malla superpuesta en un campo de petróleo.
o pozos.

nita de tiempo y se calculan nuevas presiones y ratas de producción. Estas se calculan de las saturaciones existentes en cada punto (nodo) de la malla. El proceso se repite para determinado número de interva los de tiempo y en esta forma, se calcula tanto la historia de produc ción como de presión por pozo.

Una de las aplicaciones más importantes de modelos numéricos de yacimientos es el estudio de la historia y predicción del comporta miento de un yacimiento. En el estudio de la historia del yacimiento, se trata de reproducir la misma a través del modelo para lo cual se calculan presiones y ratas de producción como función de tiempo y se comparan con los valores observados. Si no coinciden dentro de una a proximación aceptable puede ser necesario modificar algunos datos has ta que la historia observada y calculada coinciden con la exactitud de seada.

Para la predicción, se asignan ratas de producción a los pozos o al campo en total lo mismo que ratas de inyección en puntos determinados. Con este esquema de producción e inyección se estudia el comportamiento del campo empleando la información necesaria usada para el análisis de la historia. En esta forma, pueden evaluarse va - rios esquemas (programas) de producción e inyección. Introduciendo consideraciones económicas, puede seleccionarse la forma óptima de ex plotación (producción) de un campo o yacimiento.

INTERFERENCIA ENTRE CAMPOS LOCALIZADOS EN UN MISMO ACUIFERO.

A veces se encuentran zonas donde varios campos de petróleo estan localizados dentro de un mismo acuífero, es decir, comparten o estan afectados por un acuífero común. Tales campos se encuentran

en comunicación hidrodinámica; por consiguiente, la producción de fluido de uno de estos campos, trae como consecuencia una declinación de presión que se transmite a otro u otros campos a través del acuífero, ocurriendo un proceso de interferencias de presión entre campos. Este comportamiento, puede conducir a una reducción en presión en puntos localizados a varios kilómetros de un campo en producción.

Uno de los ejemplos más típicos de interferencia de campos en un acuífero común se refiere a la formación Woodbine en el oriente del Estado de Texas, E.U[51]. En esta formación se encuentran mas de doce campos importantes de petróleo con empuje hidráulico activo, compartiendo el mismo acuífero. Entre estos campos se encuentra el famoso campo East Texas.

La producción de varios de estos campos (principalmente el campo East Texas, descubierto en 1930) trajo como consecuencia que la presión inicial del campo Hawkins (ver Fig.61), descubierto en 1940, fuera 280 lpca por debajo de la presión inicial del acuífero[56]. Esto indica que el efecto de interferencia en cuanto a presión se refiere, puede ser y debe tenerse en cuenta en el estudio del comportamiento de campos situados en un acuífero común. Otros ejemplos típicos de campos que comparten un acuífero común pueden encontrarse en la literatura[57,58,59].

Uno de los métodos más comunes para evaluar problemas de interferencia en un acuífero común, es el descrito por Mortada[26]. Este método tiene las siguientes suposiciones: (1) cada campo dentro del acuífero común, tiene forma circular y la caída de presión determinada en el contacto agua-petróleo de cada campo representa la caída de presión promedia en el campo, (2) acuífero infinito, (3) la compresibilidad efectiva (c_w+c_p) es constante e independiente de presión, (4) formación uniforme

es decir, valores constantes de ϕ, k, h y también constantes las propiedades de los fluídos.

Considérese un acuífero donde existen tres campos de petróleo A, B, C, tal como lo indica la Fig.63. Se conoce la distancia entre los campos, AB, AC, BC y los radios de los mismos, R_{iA}, R_{iB}, R_{iC}. Debido a la producción de cada uno de estos campos, ocurre interferencia entre sí a través del acuífero. La producción del campo A trae como consecuencia una caída (disminución) de presión en los campos B y C. Similarmente la producción del campo B lleva consigo una pequeña caída de presión en el mismo campo B y una pequeña caída de presión en los campos A y C. Igual cosa sucede con el campo C.

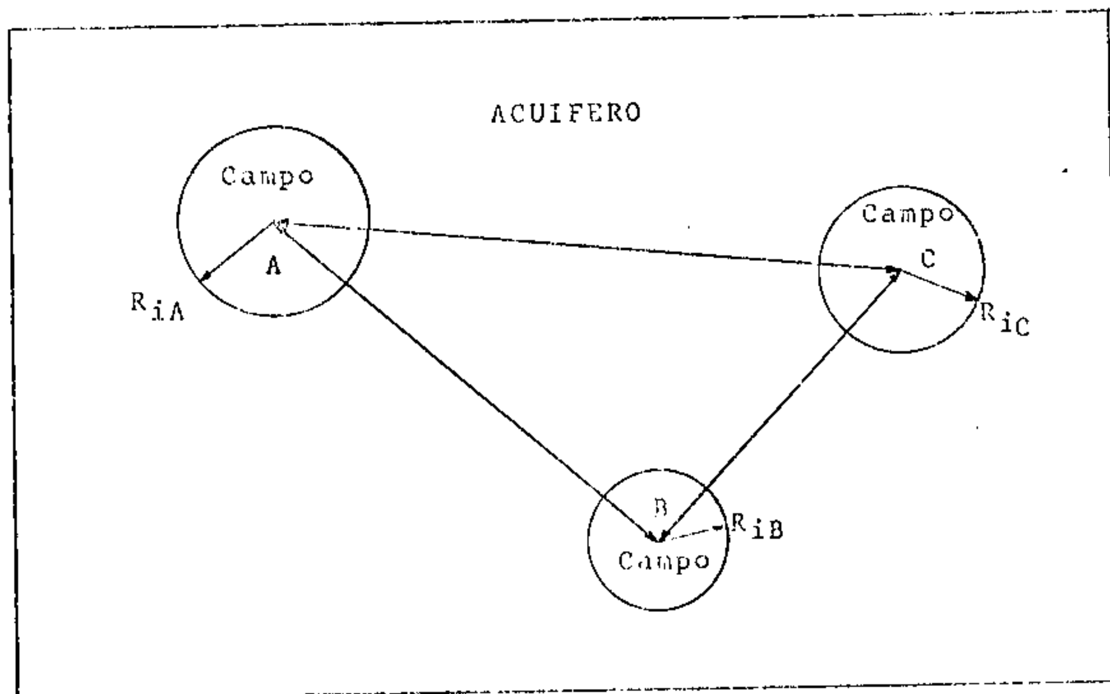


Fig. 63 - Esquema de un acuífero común que contiene tres campos de petróleo A, B y C.

Sea, $(pi-p)_{AA}$, la caída total de presión (a partir de la condición inicial) en el Campo A debido a su propia producción. Igualmente, $(pi-p)_{BB}$ y $(pi-p)_{CC}$, las caídas totales de presión en los campos B y C debido a sus propias producciones. Además, $(pi-p)_{AB}$ es la caída total (a partir de la condición inicial) de presión en el Campo A debido a la producción del Campo B. Igualmente, $(pi-p)_{AC}$ es la caída total de presión en el campo A debído a la producción del campo C y así sucesivamente en caso de que existieran más campos. $(pi-p)_{BA}$ y $(pi-p)_{BC}$ serán las caídas totales de presión en el campo B debido a la producción de los campos A y C y finalmente, $(pi-p)_{CA}$ y $(pi-p)_{CB}$ son las caídas totales de presión en el campo C debido a la producción de los campos A y B. De lo anterior puede escribirse la caída total de presión en el campo A, definido por $(pi-p)_{A}$,

$$(pi-p)_{A} = (pi-p)_{AA} + (pi-p)_{AB} + (pi-p)_{AC} \qquad (206)$$

Similarmente, las caídas totales de presión en los campos B y C,

$$(pi-p)_{B} = (pi-p)_{BB} + (pi-p)_{BA} + (pi-p)_{BC} \qquad (207)$$

$$(pi-p)_{C} = (pi-p)_{CC} + (pi-p)_{CA} + (pi-p)_{CB} \qquad (208)$$

Los términos que llevan el subíndice mezclado (AB, AC, BA, etc) se denominan "cambios (caídas) de presión debido a interferencia" para distinguirlos de los términos con subíndice de la misma letra (AA, BB, CC) que representan el "cambio (caída) de presión debido a la misma producción del campo".

Para el cálculo del cambio de presión debido a la misma producción, $(pi-p)_{AA}$, $(pi-p)_{BB}$, etc., se hace uso de la solución de van

Everdingen y Hurst para sistemas infinitos discutida anteriormente, Ec.(37), cuando r_D=1. Los cambios de presión debido a interferencia, $(pi-p)_{AB}$, $(pi-p)_{BA}$, etc. se obtienen a partir de la solución de Mortada[26] para sistemas infinitos, también discutida anteriormente, Figs. 20, 21, 22, 23 y Tabla III, para el valor apropiado de r_D. Este valor se obtiene dividiendo el valor de la distancia entre los campos considerados por el valor del radio del campo que causa la interferencia. Con referencia a la Fig.61, por ejemplo, si se está estudiando el efecto de la producción del Campo B sobre el Campo A, para calcular $(pi-p)_{AB}$, se usará $r_D = \overline{AB}/R_{iB}$; en cambio, para evaluar el efecto de la producción del Campo A sobre el Campo B, $(pi-p)_{BA}$, se usará $r_D = \overline{AB}/R_{iA}$, y asi sucesivamente.

Recuérdese que las soluciones mencionadas en el párrafo anterior se refieren al caso de rata terminal constante. En este caso debe usarse la rata de intrusión y aplicar el teorema se superposición para considerar variación en la rata de intrusión, Ec.(84),

$$\Delta p = (pi-p) = \frac{141{,}2\ \mu}{kh} \sum_{j=1}^{n} (e_j - e_{j-1})\ \Delta p\left[(t_n - t_{j-1})_D\right] \qquad (84)$$

donde t_o y e_o son iguales a cero. Para el caso de calcular los valores de $(pi-p)_{AA}$, $(pi-p)_{BB}$, etc., las presiones adimensionales $\Delta p(t_D)$ se obtienen de la Tabla II, Fig.19 o Ecs.(41) y (42). Para el caso de calcular los valores $(pi-p)_{AB}$, $(pi-p)_{BA}$, etc., las presiones adimensionales se obtienen de las Figs. 20, 21, 22, 23, Tabla III o Ecs.(49) y (50), para el valor correspondiente de r_D.

Debe tenerse en cuenta, que para yacimientos con empuje hidraúlico, la rata de intrusión de agua más la rata de expansión de hi

drocarburos es igual a la rata de producción de petróleo. En general puede escribirse[60],

$$\frac{dW_p}{dt} = e = B_o \frac{dN_p}{dt} + (R-Rs)B_g \frac{dN_p}{dt} + B_w \frac{dW_p}{dt} \qquad (209)$$

$$e = B_t \frac{dN_p}{dt} + (R-R_{si})B_g \frac{dN_p}{dt} + B_w \frac{dW_p}{dt} \qquad (210)$$

$$e = q_o \left[Bt + (R-R_{si})B_g\right] + B_w q_w \qquad (211)$$

En caso de que el yacimiento se encuentre por encima del punto de burbujeo y si no existe producción de agua, $Bt=B_o$, y la ecuación anterior puede escribirse,

$$e = q_o B_o \qquad (212)$$

En base a las ecuaciones anteriores puede convertirse fácilmente q_o a e o viceversa.

Las Ecs.(206),(207) y (208) permiten calcular las caídas totales de presión en los campos A, B, C, cuando se conocen las ratas de producción y por consiguiente intrusión. Muchos otros problemas pueden resolverse, de acuerdo a los datos disponibles. Por ejemplo: se tienen dos campos en un mismo acuífero y se conoce la historia de producción de A y la historia de presión de B. Para hacer la predicción en este caso, deben hacerse los siguientes pasos:

1)- Con los datos de historia de producción de A se determina $(pi-p)_{AAj}$ y $(pi-p)_{BAj}$.

2) - Del dato $(pi-p)_{Bj}$ y el valor $(pi-p)_{BAj}$ se calcula. $(pi-p)_{BB}$,

$$(pi-p)_{BBj} = (pi-p)_{Bj} - (pi-p)_{BAj}$$

3) - Utilizando la Ec.(95), se calcula la intrusión a cada tiempo (período) para el Campo B,

$$W_{eBj} = 1{,}119\ \phi ch\ \ R_{iB}^{2} \sum_{j=1}^{j} \Delta p_j\ Q\left[(t_n - t_{j-1})_D\right] \qquad (95)$$

El valor de $\Delta p_j = (pi-p)_{BBj+1} - (pi-p)_{BBj}$. Con estos valores se calcula la historia de intrusión del Campo B, e_{Bj}

4) - Se determina, $(pi-p)_{ABj}$, aplicando la Ec.(84) y con los valores de e_{Bj} determinados en el Paso 3) y para $r_D = AB/R_{iB}$.

5) - Finalmente,

$$(pi-p)_{Aj} = (pi-p)_{AAj} + (pi-p)_{ABj} \qquad (213)$$

Robinson[61], presenta un programa de computadores para corregir la ecuación de balance de materiales, escrita en la forma de de la Ec.(136), debido a la interferencia de otros campos localizados en un mismo acuífero. En caso de interferencia, a la Ec.(136) debe agregársele otro término que tome en cuenta los efectos de interferencia. El trabajo de Robinson presenta un ejemplo, donde considera tres campos en un mismo acuífero.

REFERENCIAS

1.- Pérez Palacio, Ramiro: Ingeniería de Yacimientos de Petróleo (Balance de Materiales y Predicción de Yacimientos), Universidad del Zulia, Escuela de Petróleo, 1964.

2.- Muskat, M.: The Performance of Bottom Drive Reservoirs, Transactions AIME, Vol. 170, 1947, p. 81.

3.- Hutchinson, T.S. and Kemp, C.E.: An Extendend Analysis of Bottom Water-Drive Reservoirs Performance, Transactions AIME, Vol 207, 1956, p. 256.

4.- Henley, D.H., Owens, W.W. and Graig, F.F.: A Scale Study of Bottom-Water Drives, Transactions AIME, Vol. 22, 1961, p. 90.

5.- Elkins, L.F.: Fosternon Field-An Unusual Problem of Bottom Water Coning and Volumetric Water Invasion Efficiency, Transactions AIME, Vol. 216, 1959, p. 130. También, Petroleum Transactions Reprint Series of AIME, No.4, p. 161.

6.- Coats, K.H.: A Mathematical Model Water Movement about Bottom Water-Drive Reservoirs, Transactions AIME, Vol. 225, Part II, 1962. p. 44.

7.- van Everdingen, A.F. and Hurst, W.: The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs, Transactions AIME, Vol. 186, 1949, p. 105.

8.- Chatas, A.T.: A Practical Treatment of Nonsteady-State Flow Problems in Reservoirs Systems, Petroleum Engineer, May 1953 p. B-42 - B-50; June 1953, p. B-38 - B-50; August 1953, p. D-44 - B-56.

9.- Nabor, G.W. and Barham, R.H.: Linear Aquifer Behavior, Transactions AIME. Vol. 231, 1964, p. 561.

10.- Criss, C.R. and McCormick, R.L.: History and Performance of the Colwater Oil Field Michigan, Petroleum Transactions reprint Series, of AIME, No. 4, p. 53.

11.- Muskat, M.: Physical Principles of Oil Production, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1949.

12.- Stewart, G.M., Callaway, F.H. and Gladfelter, R.E.: Comparison of Methods for Analysing a Water Drive Field, Torchiligt for Tensleep Reservoirs, Wyoming, Transactions AIME. Vol. 204, 1955, p. 197.

13.- Dodson, C.R. and Standing M.B.: Pressure-Volume-Temperature and Solubility Relations for Natural Gas-Water Mixtures, Drilling and Production Practices, American Petroleum Institute, 1944, p. 173.

14.- Craze, R.C. and Buckley, S.E.: A Factual Analysis of the Effect of Well Spacing on Oil Recovery, API Drilling and Production Practices, 1945, p. 144.

15.- Guthrie, R.K. and Greenberger, M.H.: The Use of Multiple Correlation Analysis for Interpreting Petroleum Engineering Data, API Drilling and Production Practice, 1955, p. 130.

16.- Arps, J.J. y otros: API Bul D14, A Statistical Study, of Recovery Eficiency, American Petroleum Institute, October 1967.

17.- Letter Symbols for Petorluem Reservoir Engineering, Natural Gas Engineering and Well Logging Quantities, Transactions AIME, Vol. 234, 1965, p. 1463.

17a.- Krans, E.: MER - A History, Drilling and Production Practice, API, 1947, p. 108.

17b.- Buckley, S.E.: Petroleum Conservation, American Institute of Mining and Metallurgical Engineers, 1951, p. 151.

18.- Matthews, C.S. and Russel, D.G.: Pressure Buildup and Flow Tests in Wells, Monograph Volume 1, SPE of AIME, 1967, p. 4.

19.- Hurst, W.: Water Influx Into a Reservoirs and Its Application to the Equation of Volumetric Balance, Transactions AIME, Vol. 151, 1943, p. 57.

20.- Miller, F.C.: Theory of Unsteady-State of Water in Linear Reservoirs, Journal of the Institute of Petroleum, November 1962, p. 365.

21.- Mueller, T.D.: Transient Response of Monhomegeneus Aquifers, Transactions AIME, Vol. 225, Part. II, 1962, p.33.

22.- Hurst, W.: Unsteady Flow of Fluids in Oil Reservoirs, Physics, January 1934, p. 5.

23.- Theis C.V.: The Relationship Between The Lowering of the Piezometric Surface and the Rate and Duration of Discharge Using Crownd Water Storage, Transactions AGU, 1935, p. 519.

24.- Muskat, M.: The Flow of Homogeneus Fluid Through Porous Media, McGraw-Hill Book Co., 1937. También, J.W. Edwards, Ann Arbor, 1946.

25.- Mueller, T.D. and Witherspoon, P.A.: Presssure Interference Effects Within Reservoirs and Aquifer, Transactions AIME, Vol. 234, 1965, p. 471.

26.- Mortada, M.: A Practical Method for Treating Oilfield Interference in Water-Drive Reservoirs, Transactions AIME. Vol. 204, 1955, p. 217.

27.- Edwardson, M.J. y otros: Calculation of Formation Temperature

Disturbances Caused by Mud Circulation, Transactions AIME, Vol. 225, 1962, p. 416.

28.- Matthews, C.S., Brons, F. and Hazebroek, P.: A Method for Determination of Average Pressure in a Bounded Reservoirs, Transactions AIME, Vol. 201, 1954, p. 152.

29.- Dietz, D.N.: Determination of Average Reservoir Pressure From Buil-Up Surveys, Transactions AIME, Vol. 1965. p. 955.

30.- Brons, F., and Miller, W.C.: A Simple Method for Correcting Spot Pressure Readings, Transactions AIME, Vol. 222, 1961, p. 803.

31.- Advance Petroleum Engineering Course, Texas A and M University, February 3 - February 14, 1964.

32 - Jahnke, E. and Emde, F.: Tables of Functions, Fourth Ed., Dover Publications, Inc, New York, 1945.

33.- Hicks, A.L. y otros: Computing Techniques for Water Drive Reservoirs, Transactions AIME, Vol. 216, 1959, p. 400.

34.- Coats, K.H. y otros: Determination of Aquiter Influence Functions From Field Data, Transactions AIME, Vol. 231, 1964, p. 1417.

35.- Igual a Ref, 1, pgs, 9 y 30.

36.- Schilthuis, R.J.: Active Oil and Reservoirs Energy, Transactions AIME, Vol, 118, 1936, p. 37. También, Petroleum Transactions Reprint Series No.3, p. 25.

37.- Pirson, S.J.: Elements of Oil Reservoir Engineering Second Edition, McGraw-Hill Book Co., 1958. p. 608. Edición en Español: Ingeniería de Yacimientos Petrolíferos, Ediciones Omega, Barcelona, España, 1965, p. 647.

38.- Speigal, M.R.: Theory and Problems of Statistics, Schaum Publishing Co., 1961, p. 219.

39.- van Everdingen, A.F. Timmerman, E.H. and McMahom, J.J.: Application of the Material Balance Equation to a Partial Water - Drive- Reservoir, Transactions AIME, Vol. 198, 1953, p. 51.

40.- Havlena, D. and Odeh, A.S.: The Material Balance as an Equation of a Straight Line, Part I, Transactions AIME. Vol. 228, p. 896; Part II, Field Cases, Transactions AIME, Vol. 231, 1964, p. 815.

41.- McEwen, C.R.: Material Balance Calculations with Water Influx in the Presence of Uncertainty in Pressure, Transactions AIME, Vol. 225, 1962, p. 120 - II.

42.- Stanley L.T.: Curve Fitting Cuts Material Balance Calculations,

Petroleum Engineer, August 1961, p. 90.

43.- Mckibbon, J.H., Paxmam, D.S. and Havlena, D.: A Reservoirs Study of the Sturgen Lake South D-3 Pool, The Journal of Canadian Petroleum Technology, Vol.2, No.3, Fall 1963, p. 142.

44.- Welge, H.J.: A Simplified Method for Computing Oil Recoveries by Gas or Water Drive, Transactions AIME, Vol. 195, 1952, p. 91.

45.- Woody, L.D., Jr. and Monscrip III, R.: Performance Calculations for Combination Drive Reservoirs, Transactions AIME, Vol. 207, 1956, p. 129.

46.- Craft, B.C. and Hawkins, M.F.: Applied Petroleum Reservoir Engineering, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1959, p. 368. Edición en Español: Ingeniería de Yacimientos Aplicada, Editorial Tecnos, S.A., Madrid, España, 1968, p. 462.

47.- Buckley, S.E. and Leverett, M.C.: Mechanism of Fluid Displacement in Sands, Transactions AIME, Vol. 146, 1942, p. 107.

48.- Rachford, H.H. Jr., y otros: Application of Numerical Methods to Predict Recovery From Thin Oil Columns, Transactions AIME, Vol. 213, 1958, p. 193.

49.- Huctchinson, T.S. and Sikora, V.J.: A Generalized Water-Drive Analysis, Transactions AIME, Vol. 216, 1950, p. 169.

50.- Bruce, W.A.: An Electrical Device for Analizing Oil Reservoir Behavior, Transactions AIME, Vol. 151. 1943, p. 112.

51.- Rumble, R.C. y otros: A Reservoir Analyzer Study of the Woodbine Basin, Transactions AIME, Vol. 192, 1951, p. 331. También: Petroleum Transactions Reprint Series No. 4, p. 123.

52.- Moore, W.D. and Truby, L.G., Jr.: The Pressure Performance of Five Fields Completed in a Common Acuifer, Transactions AIME, Vol. 195, 1952, p. 297.

53.- Patterson, O.L. y otros: The Determination of the Water Inyection Program for the Delhi Field by Means of the Atomatic Multipool Analizer, Transactions AIME, Vol. 207, 1956, p. 73.

54.- Igual a Ref. 46, p. 236, Edición Española, p. 300.

55.- van Poolen, H.K., Bixel, H.C. and Jargon, J.R.: Reservoirs Modeling - 1: What it is, What it Does, The Oil and Gas Journal, July 28, 1969, p. 158.

56.- Bell, J.S. and Shepherd, J.M.: Pressure Behavior in the Woodbine Sand, Transactions AIME, Vol. 192, 1951, p. 19. Tambien, AIME Petroleum Transactions Reprint Series No. 4, p. 113.

57.- Moore, W.D. and Truby, L.G., Jr.: Pressure Performance of Five Fields Completed in a Common Aquifer, Transactions AIME, Vol.

195, 1952, p. 297.

58.- Coats, K.H., Tek, M.R. and Katz, D.L.: Method for Predicting the Behavior of Mutually Interfering Gas Reservoirs Adyacent to a Common Aquifer, Transactions AIME, Vol. 216, p. 247.

59.- Paxman, D.S. and Havlena, D.: Effects of Hydrodynamics Pressure Interference on Reservoir Performance, Buffalo Lake D-3 Pool, Journal of Petroleum Technology, January 1966, p. 23.

60.- Igual a Ref. 46, p. 157.

61.- Robinson, M.P.: Pressure Interference Correction to the Material Balance for Water Drive Reservoir Using a Digital Computer, Transactions AIME, Vol. 213, 1958 p. 418.

APENDICE A

TABLA IA - Valores del Integral Exponencial $-Ei(-x)$ como Función de x.

1- Intervalo de x entre 9 y $9x10^{-15}$

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Xx1	0,219	0,049	0,013	0,0038	0,0011	0,00036	0,00012	0,000038	0,000012
$Xx10^{-1}$	1,82	1,22	0,91	0,70	0,56	0,45	0,37	0,31	0,26
$Xx10^{-2}$	4,04	3,35	2,96	2,68	2,47	2,30	2,15	2,03	1,92
$Xx10^{-3}$	6,33	5,64	5,23	4,95	4,73	4,54	4,39	4,26	4,14
$Xx10^{-4}$	8,63	7,94	7,53	7,25	7,02	6,84	6,69	6,55	6,44
$Xx10^{-5}$	10,94	10,24	9,84	9,55	9,33	9,14	8,99	8,86	8,74
$Xx10^{-6}$	13,24	12,55	12,14	11,85	11,63	11,45	11,29	11,16	11,04
$Xx10^{-7}$	15,54	14,85	14,44	14,15	13,93	13,75	13,60	13,46	13,34
$Xx10^{-8}$	17,84	17,15	16,74	16,46	16,23	16,05	15,90	15,76	15,65
$Xx10^{-9}$	20,15	19,45	19,05	18,76	18,54	18,35	18,20	18,07	17,95
$Xx10^{-10}$	22,45	21,76	21,35	21,06	20,84	20,66	20,50	20,37	20,25
$Xx10^{-11}$	24,75	24,06	23,65	23,36	23,14	22,96	22,81	22,67	22,55
$Xx10^{-12}$	27,05	26,36	25,96	25,67	25,44	25,26	25,11	24,97	24,86
$Xx10^{-13}$	29,36	28,66	28,26	27,97	27,75	27,56	27,41	27,28	27,16
$Xx10^{-14}$	31,66	30,97	30,56	30,27	30,05	29,87	29,71	29,58	29,46
$Xx10^{-15}$	33,96	33,27	32,86	32,58	32,35	32,17	32,02	31,88	31,76

El número que encabeza cada columna, multiplica al número en la prîmera columna. Ejemplo:

$-Ei\ (-7x10^{-13}) = 27,41$

Para $x < 0,01$: $-Ei(-x) = -(\ln x + 0,5772) = \ln\frac{1}{x} - 0,5772 = \ln\frac{1}{4x} + 0,80907$

TABLA IA - (Continuación).

2- Intervalo de x entre 0,01 y 0,99

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00		4,0379	3,3547	2,9591	2,6813	2,4679	2,2953	2,1508	2,0269	1,9187
0,10	1,8229	1,7371	1,6595	1,5889	1,5241	1,4665	1,4092	1,3578	1,3098	1,2649
0,20	1,2227	1,1829	1,1454	1,1099	1,0762	1,0443	1,0139	0,9849	0,9573	0,9309
0,30	0,9057	0,8815	0,8583	0,8361	0,8147	0,7942	0,7745	0,7554	0,7371	0,7194
0,40	0,7024	0,6859	0,6700	0,6549	0,6397	0,6253	0,6114	0,5979	0,5848	0,5721
0,50	0,5598	0,5478	0,5362	0,5250	0,5140	0,5034	0,4930	0,4830	0,4732	0,4636
0,60	0,4544	0,4454	0,4366	0,4280	0,4197	0,4115	0,4036	0,3959	0,3883	0,3810
0,70	0,3738	0,3668	0,3599	0,3532	0,3467	0,3403	0,3341	0,3280	0,3221	0,3163
0,80	0,3106	0,3050	0,2996	0,2943	0,2891	0,2840	0,2790	0,2742	0,2694	0,2647
0,90	0,2602	0,2557	0,2513	0,2470	0,2429	0,2387	0,2347	0,2308	0,2269	0,2231

El número que encabeza cada columna corresponde a la segunda cifra decimal. Por ejemplo: -Ei(-0,38) = 0,7371

3- Intervalo de x entre 1,0 y 4,9

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,2194	0,1860	0,1584	0,1355	0,1162	0,1000	0,08631	0,07465	0,06471	0,05620
2,0	0,04890	0,04261	0,03719	0,03250	0,02844	0,02491	0,02185	0,01918	0,01689	0,01482
3,0	0,01304	0,01149	0,01013	0,008939	0,007890	0,006970	0,006160	0,005448	0,004820	0,004267
4,0	0,003779	0,003349	0,002969	0,002633	0,002336	0,002073	0,001841	0,001635	0,001453	0,001291

El número que encabeza cada columna corresponde a la primera cifra decimal. Por ejemplo, -Ei(-3,7) = 0,005448

4- Intervalo de x entre 5 y 15.

x	-Ei(-x)	x	-Ei(-x)	x	-Ei(-x)
5	0,001148	9	0,00001245	13	0,0000001622
6	0,0003601	10	0,000004157	14	0,00000005566
7	0,0001155	11	0,000001400	15	0,00000001918
8	0,00003737	12	0,0000004751		



Fig. 1A.- Valores del Integral Exponencial, $-E_i(-X)$ como función de X

APENDICE B

Determinación del Cambio de Presión Adimensional, $\Delta p(t_D)$, en Terminos de t_D, para el Caso 3 de Sistemas Radiales, usando la Función $F(t_{DA})$ de Matthews, Brons y Hazebroek, MBH[28].

La ecuación para calcular la presión a un tiempo t, de un pozo situado en un sistema radial limitado y que fluye a una rata constante puede expresarse por[28],

$$p(r_w,t) = pi - \frac{q\mu B}{4\pi kh}\left[-Ei(-\frac{\phi\mu c r_w^2}{4kt}) + Y(t_{DA})\right] \qquad (1B)$$

donde t_{DA} está definido por,

$$t_{DA} = \frac{kt}{\phi\mu c\pi r_w^2} = \frac{kt}{\phi\mu cA} \qquad (2B)$$

$Y(t_{DA})$ es solo función de t_{DA} para valores relativamente grandes de r_{eD}, tal que $1/r_{eD}^2 \cong 0$, y representa, al multiplicarse por $q\mu B/4\pi kh$ la caida extra de presión comparada con la solución para yacimientos infinitos,debido al límite del yacimiento. (Recuérdese que en el cas de intrusión de agua a un yacimiento, $r_w = R_i$).

MBH[28] desarrollaron una relación para calcular $Y(t_{DA})$ dada por,

$$F(t_{DA}) = 4\pi t_{DA} - Y(t_{DA}) \qquad (3B)$$

La función $F(t_{DA})$ se representa gráficamente en la Fig.1B en términos de t_{DA}.

Introduciendo la Ec.(3B) en la Ec.(1B),

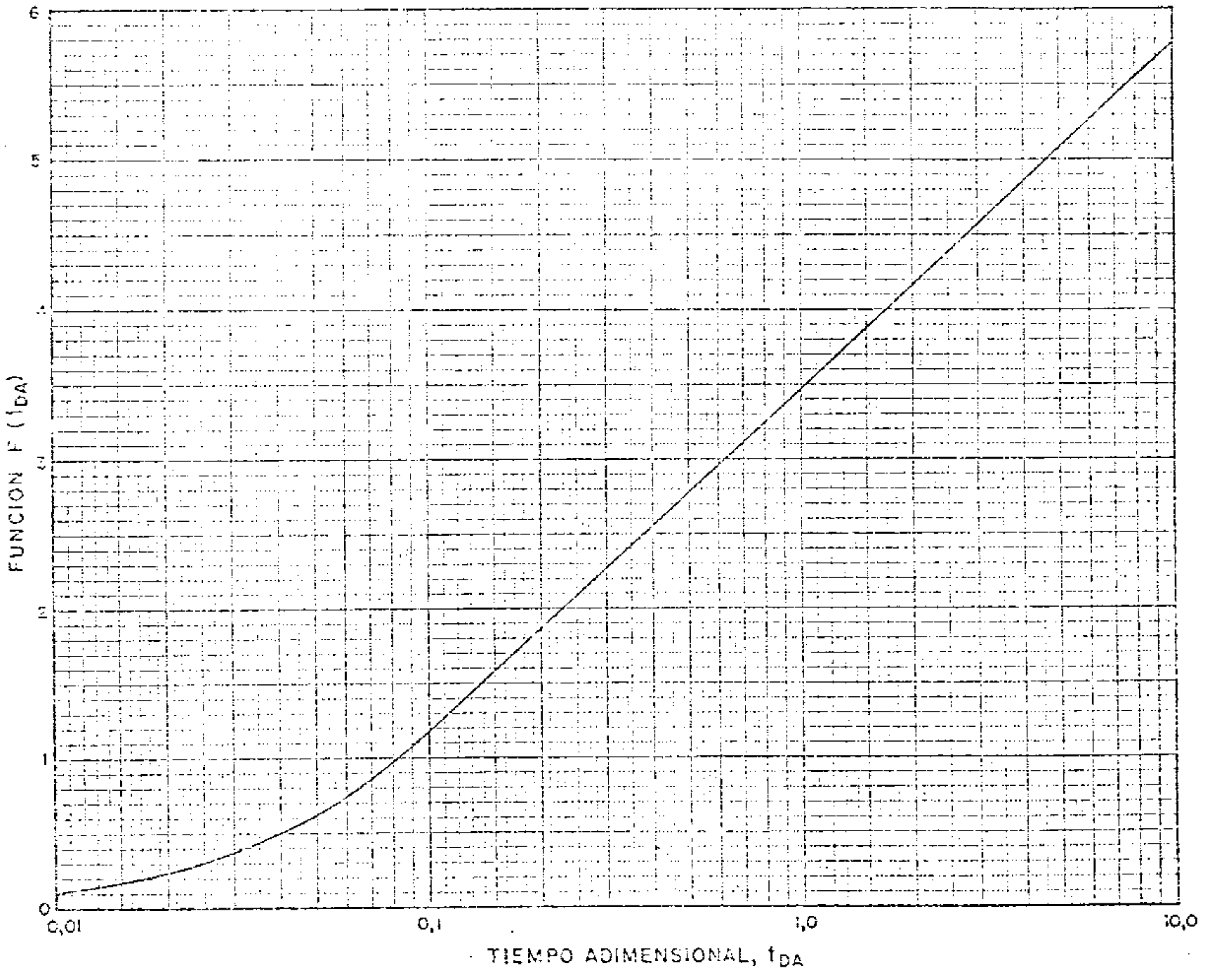


Fig. 18.- Función de MBH, F (t_{DA}), contra tiempo adimensional, t_{DA}, para un area de drenaje circular (Referencia 28)

$$p(r_w,t) = p_i - \frac{q\mu B}{4\pi kh}\left[-Ei(-\frac{\phi\mu c r_w^2}{4kt}) + 4\pi t_{DA} - F(t_{DA})\right] \quad (4B)$$

van Everdingen y Hurst[7] definen $\Delta p(t_D)$, Ec.(35) del texto,

$$\Delta p(t_D) = \frac{2\pi kh}{q\mu B}\left[p_i - p(r_w,t)\right] \quad (5B)$$

reemplazando la Ec.(4B) en la Ec.(5B),

$$\Delta p(t_D) = \frac{1}{2}\left[-Ei(-\frac{\phi\mu c r_w^2}{4kt}) + 4\pi t_{DA} - F(t_{DA})\right] \quad (6B)$$

ya que,

$$t_D = \frac{kt}{\phi\mu c r_w^2} \quad (7B)$$

luego,

$$t_{DA} = \frac{t_D}{\pi r_{eD}^2} \quad (8B)$$

y la Ec.(6B) puede escribirse,

$$\Delta p(t_D) = \frac{1}{2}\left[-Ei(-\frac{1}{4t_D}) + 4\pi t_{DA} - F(t_{DA})\right] \quad (9B)$$

La ecuación anterior se usa en el cálculo de $\Delta p(t_D)$, para diferente valores de r_{eD}, en función de t_D.

Si $t_{DA} > 0,1$, puede escribirse[29],

$$F(t_{DA}) = \ln(C_A t_{DA}) \quad (10B)$$

donde[30],

$$C_A = \frac{4\pi e^{3/2}}{\gamma} = 31,6 \quad (11B)$$

donde, γ = constante de Euler = 1,78... ?? . Por tanto, la Ec.(9B) puede escribirse,

$$\Delta p(t_D) = \frac{1}{2}\left[-Ei(-\frac{1}{4t_D}) + 4\pi t_{DA} - \ln(31,6 t_{DA})\right] \quad (12B)$$

Esta expresión es la Ec.(61) del texto.

APENDICE C

1 - Cálculo del Integral $f(p,t)$ de la Ecuación de Schilthuis, Ec.(101). El integral de esta ecuación se define por,

$$f(p,t) = \int_0^t (p_i - p)dt \qquad (1C)$$

La Fig.55 presenta la historia de presión de un yacimiento (contacto agua-petróleo). De la historia se conocen los valores de presión p_i, p_1, p_2, p_3 .... p_{n-2}, p_{n-1}, p_n a los tiempos 0, t_1, t_2, t_3 .... t_{n-2}, t_{n-1}, t_n. El integral $f(p,t)$ representa el área por encima de la curva, es decir, el área comprendida entre la curva continua y la linea punteada horizontal superior.

El método del cálculo del integral $f(p,t)$ puede hacerse de varias maneras de acuerdo a la definición del diferencial de presión Δp. Si el Δp se define,

$$\Delta p_j = (p_i - p_j) \qquad (2C)$$

donde j = 1, 2, 3, ... n , luego el área por encima de la curva puede calcularse por la sumatoria de una serie de áreas de trapecios, excepto para el primer $\Delta t = (t_i - 0)$ que será el área de un triángulo. Si además se define, .

$$\Delta t_j = (t_j - t_{j-1}) \qquad (3C)$$

donde j = 1, 2, 3, ... n (donde t_o = 0), el área encima de la curva puede escribirse,

$$f(p,t) = \left(\frac{\Delta p_1}{2}\right)\Delta t_1 + \left(\frac{\Delta p_1 + \Delta p_2}{2}\right)\Delta t_2 + \left(\frac{\Delta p_2 + \Delta p_3}{2}\right)\Delta t_3 + \ldots .$$

$$+ \left(\frac{\Delta p_{n-1} + \Delta p_n}{2}\right)\Delta t_n \qquad (4C)$$

$$f(p,t) = \frac{1}{2}\left[\Delta p_n \Delta t_n + \sum_{j=1}^{n-1} \Delta p_j(\Delta t_j + \Delta t_{j+1})\right] \qquad (5C)$$

Reemplazando las Ecs.(2C) y (3C) en la Ec.(4C),

$$f(p,t) = \frac{1}{2}\Big[(p_i - p_1)(t_1 - t_0) + (p_i - p_1 + p_i - p_2)(t_2 - t_1) + (p_i - p_2 + p_1 - p_3)$$

$$(t_3 - t_2) + \ldots . + (p_i - p_{n-1} + p_i - p_n)(t_n - t_{n-1})\Big] \qquad (6C)$$

$$f(p,t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} (2p_i - p_j - p_{j-1})(t_j - t_{j-1}) \qquad (7C)$$

$$= p_i \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} (p_j + p_{j-1})(t_j - t_{j-1}) \qquad (8C)$$

donde $p_o = p_i$. Si el $\Delta t_j = (t_j - t_{j-1})$ es constante e igual a Δt, es decir, los intervalos de tiempo son iguales, las Ecs.(5C), (7C) y (8C), pueden escribirse,

$$f(p,t) = \frac{\Delta t}{2}\left[\Delta p_n + 2\sum_{j=1}^{n-1} \Delta p_j\right] \qquad (9C)$$

$$= \frac{\Delta t}{2}\sum_{j=1}^{n} (2p_i - p_i - p_{j-1}) \qquad (10C)$$

$$= \Delta t\left[n p_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(p_j + p_{j-1})\right] \qquad (11C)$$

$$= \frac{\Delta t}{2}\left[(2n-1)p_i - p_n - 2\sum_{j=1}^{n-1} p_j\right] \qquad (12C)$$

Si en el análisis de la historia del yacimiento o en la predicción es necesario utilizar la Ec.(119), el diferencial de presión usado en esta ecuación se define en la forma indicada en la Fig. 55, Ec.(122) del texto,

$$\Delta p_j = \frac{1}{2}(p_{j-2}-p_j) \qquad (13C)$$

donde $j = 1, 2, 3, \ldots n$ y $p_{-1} = p_1 = p_i$. Si además, el Δt_j se define por la Ec.(3C), en este caso el área por encima de la curva estará dada por la suma de las áreas de los diferentes rectángulos que aparecen en la Fig.55,

$$f(p,t) = \Delta p_1 \Delta t_1 + (\Delta p_1+\Delta p_2)\Delta t_2 + (\Delta p_1+\Delta p_2+\Delta p_3)\Delta t_3 + \ldots$$

$$+ (\Delta p_1+\Delta p_2+\Delta p_3 + \ldots \Delta p_n)\Delta t_n \qquad (14C)$$

$$f(p,t) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \right) \Delta t_j \qquad (15C)$$

Reemplazando el Δp_j de la Ec.(13C), se obtienen las Ecs.(7C) y (8C) deducidas anteriormente.

Si los intervalos de tiempo son iguales, Δt_j es constante e igual a Δt, la Ec.(15C) puede escribirse,

$$f(p,t) = \Delta t \sum_{j=1}^{n} \sum_{j=1}^{j} \Delta p_j \qquad (16C)$$

$$= \Delta t \sum_{j=1}^{n} (n+1-j)\Delta p_j \qquad (17C)$$

Reemplazando los valores de Δp_j de la Ec.(13C), se obtienen las Ecs.

(9C) a (12C) deducidas anteriormente.

Finalmente, si el diferencial de presión se define por,

$$\Delta p_j = (p_{j-1} - p_j) \qquad (18C)$$

donde j = 1, 2, 3, ... n. Para j = 1, $p_o = p_i$. Como antes el valor de Δt_j se define por la Ec.(3C) y el área por encima de la curva estará dado por la suma de las áreas de rectángulos y triángulos en la siguiente forma,

$$f(p,t) = \frac{\Delta p_1}{2} \Delta t_1 + (\Delta p_1 + \frac{\Delta p_2}{2}) \Delta t_2 + (\Delta p_1 + \Delta p_2 + \frac{\Delta p_3}{2}) \; t_3$$

$$+ \; .... + (\Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_3 + \; .... \; \frac{\Delta p_n}{2}) \Delta t_n \qquad (19C)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \Delta p_j \, \Delta t_j + \sum_{j=1}^{n-1} (\sum_{i=1}^{j} \Delta p_i) \, \Delta t_{j+1} \qquad (20C)$$

Reemplazando el valor de Δp_j de la Ec.(18C), se obtienen las Ecs. (7C) y (8C).

Si los intervalos de tiempo son iguales, Δt_j es constante e igual a Δt, la ecuación anterior puede escribirse,

$$f(p,t) = \frac{\Delta t}{2} \left[\sum_{j=1}^{n} \Delta p_j + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (\sum_{i=1}^{i} \Delta p_i) \right] \qquad (21C)$$

Finalmente reemplazando Δp_j por la Ec.(18C), se obtienen las Ecs. (10C) a (12C)

2- Cálculo del Integral f(p,t) de la Ecuación de Hurst Modificada, Ec.(109). El integral de esta ecuación se define por,

$$f(p,t) = \int_0^t \frac{p_i - p}{\log(at)} dt = \int_0^t \frac{p}{\log(at)} dt \qquad (22C)$$

Como antes, se conoce la historia de presión, o sea una serie de presiones p_1, p_2, p_3 .... p_n a los tiempos t_1, t_2, t_3 .... t_n respectivamente. Para obtener gráficamente el valor del integral de la Ec.(22C), basta calcular los valores de Δp_j de acuerdo a la Ec.(2C), dividir cada Δp_j por el $\log(at_j)$ correspondiente y graficar los valores de $\Delta p_j/\log(at_j)$ como función de t. El área bajo la curva resultante, será el calor del integral. De nuevo, el tiempo estará dividido en intervalos de acuerdo a la Ec.(3C). El área bajo la curva será la suma de las áreas de una serie de trapecios, excepto en el primer intervalo que será el área de un triángulo,

$$f(p,t) = \frac{1}{2} \frac{\Delta p_1}{\log(at_1)} \Delta t_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta p_1}{\log(at_1)} + \frac{\Delta p_2}{\log(at_2)}\right) \Delta t_2 + \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{\Delta p_2}{\log(at_2)} + \frac{\Delta p_3}{\log(at_3)}\right) \Delta t_3 + \ldots . \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta p_{n-1}}{\log(at_{n-1})} + \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta p_n}{\log(at_n)}\right) \Delta t_n \qquad (23C)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta p_n}{\log(at_n)} \Delta t_n + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\Delta p_j}{\log(at_j)} (\Delta t_j + \Delta t_{j+1})\right] \qquad (24C)$$

Reemplazando los valores de Δp y Δt de las Ecs.(2C) y (3C),

$$f(p,t) = \frac{1}{2}\left[\frac{p_i - p_n}{\log(at_n)} (t_n - t_{n-1}) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{p_i - p_j}{\log(at_j)} (t_{j+1} - t_{j-1})\right] \text{(25C}$$

Si los intervalos de tiempo son iguales, es decir, Δt_j = constante = Δt, las Ecs.(24C) y (25C) pueden escribirse,

$$f(p,t) = \frac{\Delta t}{2}\left[\frac{\Delta p_n}{\log(at_n)} + 2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\Delta p_j}{\log(at_j)}\right] \qquad (26C)$$

$$= \frac{\Delta t}{2}\left[\frac{p_i-p_n}{\log(at_n)} + 2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{p_i-p_j}{\log(at_j)}\right] \qquad (27C)$$

3.- Cálculo de la sumatoria f(p,t) de la Ecuación de van - Everdingen y Hurst, Ec.(119). La sumatoria de esta ecuación está definida por,

$$f(p,t) = \sum_{j=1}^{n} \Delta p_j \; Q\left[(t_n - t_{j-1})_D\right] \qquad (28C)$$

donde t_n es el tiempo a la cual se desea calcular la sumatoria f(p,t). El valor de Δp_j se obtiene en la forma indicada en la Fig.55 y según se discutió en el texto, Ec.(122).

APENDICE D

Determinación del Petróleo o Gas Originalmente en el Yacimiento, N ó G y la Constante de Intrusión de Agua, C, por Mínimos Cuadrados[38].

Las Ecs.(136) y (144) del texto pueden escribirse,

$$Y = CX + A \tag{1D}$$

donde A, constante; para yacimientos de petróleo es N y para yacimientos de gas es G. Los valores de C y A (constantes) pueden determinarse por mínimos cuadrados, siempre y cuando se tenga una serie de valores de Y y X. Cuando la ecuación se escribe en la forma anterior se habla de LINEA DE REGRESION DE Y SOBRE X.

Considerando la ecuación anteior para yacimientos de petróleo, A=N, escribiéndola para una serie de valores de Y y X, y sumando las ecuaciones resultantes puede escribirse la denominada primera ecuación normal,

$$\sum_{1}^{n} Y_i = C\sum_{1}^{n} X_i + nN \tag{2D}$$

Si cada una de las ecuaciones anteriores se multiplica por X, y se suman las ecuaciones resultantes, se obtiene la segunda ecuación normal.

$$\sum_{1}^{n} X_i \; Y_i = C\sum_{1}^{n} X_i^2 + N\sum_{1}^{n} X_i \tag{3D}$$

despejando C y N de estas dos ecuaciones,

$$C = \frac{n\sum_{1}^{n} X_i \; Y_i - (\sum_{1}^{n} X_i)(\sum_{1}^{n} Y_i)}{n\sum_{1}^{n} X_i^2 - (\sum_{1}^{n} X_i)^2} \qquad (4D)$$

$$N = \frac{(\sum_{1}^{n} X_i^2)(\sum_{1}^{n} Y_i) - (\sum_{1}^{n} X_i)(\sum_{1}^{n} X_i \; Y_i)}{n\sum_{1}^{n} X_i^2 - (\sum_{1}^{n} X_i)^2} \qquad (5D)$$

o también si el valor de C se reemplaza en la Ec.(2D),

$$N = \frac{1}{n}(\sum_{1}^{n} Y_i - C\sum_{1}^{n} X_i) \qquad (6D)$$

La Ec.(1D) puede arreglarse en forma diferente. Dividiendo por C y transponiendo términos,

$$X = \frac{1}{C} Y - \frac{1}{C} N \qquad (7D)$$

Si se define,

$$C' = \frac{1}{C} \qquad (8D)$$

$$N' = - \frac{1}{C} N = C'N \qquad (9D)$$

la Ec.(7D) puede escribirse,

$$X = C'Y + N' \qquad (10D)$$

Cuando la ecuación de la linea recta se escribe en esta forma, se habla de LINEA DE REGRESION DE X SOBRE Y. Los valores de C' y N' son constantes.

En forma similar al caso anterior pueden escribirse las ecuaciones normales,

$$\sum_{1}^{n} X_i = C'\sum_{1}^{n} Y_i + nN' \qquad (11D)$$

$$\sum_{1}^{n} X_i \; Y_i = C'\sum_{1}^{n} Y_i^2 + N' \sum_{1}^{n} Y_i \qquad (12D)$$

de donde puede obtenerse C' y N'

$$C' = \frac{n\sum_{1}^{n} X_i \; Y_i - (\sum_{1}^{n} X_i)(\sum_{1}^{n} Y_i)}{n\sum_{1}^{n} Y_i^2 - (\sum_{1}^{n} Y_i)^2} \qquad (13D)$$

$$N' = \frac{(\sum_{1}^{n} Y_i^2)(\sum_{1}^{n} X_i) - (\sum_{1}^{n} Y_i)(\sum_{1}^{n} X_i \; Y_i)}{n\sum_{1}^{n} Y_i^2 - (\sum_{1}^{n} y_i)^2} \qquad (14D)$$

o también se el valor de C' se reemplaza en la Ec.(11D),

$$N' = \frac{1}{n}(\sum_{1}^{n} X_i - C'\sum_{1}^{n} Y_i) \qquad (15D)$$

Una vez obtenidos C' y N' , puede determinarse C y N a través de las Ecs.(8D) y (9D).

Cuando se trata de yacimientos de gas, se cumplen exacta - mente las mismas ecuaciones, solo que en lugar de calcular N y N' el valor correspondiente será G y G'. Además debe tenerse cuidado al calcular Y y X, usar las definiciones correspondientes de acuerdo al tipo de yacimiento y tipo de intrusión.

YACIMIENTOS CON EMPUJE HIDRAULICO

RAMIRO PEREZ PALACIO

ERRORES

Página	Línea	Dice	Debe Decir
1	5	concecuencia	consecuencia
2	27	variado	variada
3	7	son resultado	es resultado
5	14	lates	tales
5	24-25	energis	energía
16	23	desplacen	desplacen
17	4	corrdenadas	coordenadas
17	13	pororso	poroso
17	22	$(L^3/T)L^2 = L/T)$	$(L^3/T/L^2 = L/T)$
22	Ec.(11)	$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \quad \frac{\partial \rho}{\partial p}$	$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{c\rho} \quad \frac{\partial \rho}{\partial z}$
25	13	pude	puede
32	12	$(\frac{\partial p}{\partial x}) = 0$	$(\frac{\partial p}{\partial x})_L = 0$
33	Ec.(28)	$\sum_{n-1}^{\infty}$	$\sum_{n=1}^{\infty}$
35	2	imitario	unitario
37	15	presentandas	presentadas
48	1	aporximarse	aproximarse
50	22	luego Chatas[8].	luego por Chatas[8].
57	11	Apëndiece	Apéndice
58	Ec.(48):	El numerador dentro del signo integral debe ser: $(1 - e^{-u^2 t_D}) \left[J_1(u)Y_o(ur_D) - Y_1(u)J_o(ur_D)\right]du$	
58	última	página siguiente.	página 65.
65		El valor de π que entra en las definiciones de ierf(x), erfc(x) y erf(x) debe ser: $\sqrt{\pi}$	
65		Los límites de integración de la definición de erfc(x) debe ser: $\int_x^{\infty}$ y no $\int_o^{\infty}$	
77	18	con las raices	son las raices
97	7	$t_D \geq 0,5(r_{eD})^2$	$t_D \geq 0,5(r_{eD})^3$

Página	Linea	Dice	Debe Decir
117	10	dividada	dividida
126	15	histroia	historia
136	21-22	obtenrse	obtenerse
137	Ec.(97):	Debe ser: $W_e = NB_{oi} - (N-N_p)B_o + W_p - W_i$	
138	2	eucaciones	ecuaciones
138	5	eliminana	eliminará
139	5	concer	conocer
140	11-12	calcularse	hacerse
140	12	conocen	conoce
140	13	series	serie
141	13	días meses	días, meses
142	8	ya que se C_s se	ya que C_s se
143	Ec.(118):	La última sumatoria a la derecha del numerador debe ser: $\sum_1^n C_{sj}\, t_j \log(t_j)$ y no $\sum_1^n C_{cj} \log(t_j)$	
143	9	represetna	representa
145	8	disctutido	discutido
145	9	conocen	conoce
145	19	La parte derecha de la ecuación para Δp_3 debe ser: $\frac{1}{2}(p_i - p_3)$ y no $\frac{1}{2}(p_1 - p$	
147	20	converitr	convertir
148		conociemiento	conocimiento
149	Ec.(130):	Debe ser: $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (C_{vp} - C_{vj})^2}$	
157	3	calculado	cálculo
158	17	obtenrse	obtenerse
159	11	razoanes	razones
161	20	infoermación	información
162	20	fraficados	graficados
164	5	que para que	para cual
165	5	incensitivo	insensitivo
166	2	MaEwen	McEwen
167	Ec.(160):	Debe ser: $X = G_p B_g + W_p - W_i$	
167	13	sencible	sensible
169	13	calor	valor
169	última	yacimiento	yacimientos

Página	Línea	Dice	Debe Decir
170	Ec.(167):	$Q(t_D) = \Delta t_D)^m$	$Q(t_D) = (\Delta t_D)^m$
171	1	cosntante	constante
171	3	cuanta	cuenta
171	16	yacimiento	yacimientos
174	10	taels	tales
175	4	dividdiéndolos	dividiéndolos
176	9	$\Delta\rho\ (\rho_o - \rho_g)$	$\Delta\rho = -(\rho_o - \rho_g)$
178	9	facores	factores
179	1	en se desee	en que se desee
180	10	expredada	expresada
181	3	productivifad, j	productividad, J
181	2	en	el
181	2	produtividad	productividad
181	12	prevenier	prevenir
181	16	hidrúalico	hidráulico
181	18	facotr	factor
181	22	a la que	a la cual
183	1	conocerce	conocerse
184	6	Un aumento	Una disminución
187	1	mecionado	mencionado
187	19	fácilemente	facilmente
188	4	correspidiente	correspondiente
189	pénúltima	aumneta	aumenta
190	3	constante. Fig. 19	constante.
192	Ec.(194):	Debe ser: $\Delta Z_j = Z(J\Delta t) - Z((j-1)\Delta t)$	
194	22	repetin	repiten
195	4	correción	corrección
197	6	a la que	en la que
197	16	En	El
199	5	etécticos	eléctricos
200	1	condesador	condensador
200	1	mircofaradios	microfaradios
200	2	eléctircas	eléctricas
201	16	correinte	corriente
204	21	ecuacioens	ecuaciones
215	35	896;	896, 1963;
230	12	anteior	anterior